Ontologische Untersuchungen zum Cantor'schen Mengenbegriff.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Albert-Ludwigs-Universität

zu

Freiburg i. Br.,

vorgelegt von

Hans Freund

aus Berlin-Dahlem.

Quakenbrück

Druck: Handelsdruckerei C. Trute

1933.

Referent: Professor Dr. Heidegger.
Korreferent: Professor Dr. Doetsch.

Tag der mündlichen Prüfung: 17. November 1932.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen Eltern!

Einteilung.

I. Teil: Menge und Zeichen.

§ 1. Menge und Element 2
§ 2. Zeichen und Zeichensuccession 7
§ 3. Das Zeichen-Steigerungsverfahren 13
§ 4. Zeichenbezug und Zeitbestimmtheit unendlicher Mengen 20

II. Teil: Menge und Zeitlichkeit.

Einleitung: Möglichkeit und Ziel einer Neuorientierung der Untersuchungen 30
§ 1. Der Begriff einer Menge 36
§ 2. Die Räumlichkeit einer Menge 39
§ 3. Die Räumlichkeit eines Zeugganzen 43
§ 4. Die Endlichkeit einer Menge 46
§ 5. Husserls Begriff der kollektiven Verbindung . . . 51
§ 6. Über eine Kantische Auslegung des Mathematisch-Endlichen 54
§ 7. Der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen bei Husserl 56
§ 8. Die Zeitlichkeit einer unendlichen Menge 59
§ 9. Die Abzählbarkeit der unendlichen Mengen . . . 67
§ 10. Die Überabzählbarkeit der unendlichen Mengen . . 75

ANHANG: Zur Dialektik der Mengenlehre 81

Literatur.

M. Heidegger, Sein und Zeit. 1927.

— Kant und das Problem der Metaphysik. 1929.

Kant, Kritik der reinen Vernunft.

— De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis. 1770.

E. Husserl, Philosophie der Arithmetik, I. Bd., 1891.

O. Becker, Mathematische Existenz. 1927.

G. Cantor, Sämtliche Schriften (hrsg. von E. Zermelo, 1932).

A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. 1928.

E. Zermelo, Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Fund. math. tom. XVI p. 29—47. 1930.

Vorwort.

Der Gedanke zu vorliegender Arbeit entstand nach einer Vorlesung, die Herr Professor Fraenkel in Marburg über „Mengenlehre“ hielt. Doch wären die angestellten Untersuchungen kaum über ein Anfangsstadium hinausgelangt, wenn sie nicht die ständige Ausrichtung auf ontologische Problematik überhaupt hätten erfahren können. Ich werde Herrn Professor Heidegger stets dankbar sein für die vielfachen, freundlichst gegebenen unentbehrlichen Beurteilungen und Hinweise, die der Arbeit die einheitliche philosophische Orientierung verleihen sollten. Herrn Professor Becker schulde ich Dank für Bemühungen, die er an ein Vorstadium der Untersuchungen liebenswürdigerweise gewandt hat.

I. Teil: Menge und Zeichen.

§ 1.

Menge und Element.

Eine Menge stellt sich dar als eine Ganzheit eigener Art. Jede Ganzheit besteht aus Teilen, und das Verhältnis, in dem die Teile zur Ganzheit stehen, bestimmt ihren jeweiligen Ganzheitscharakter. Im wesentlichen ist zweifach zu unterscheiden: a/ die Teile sind in dem, was sie sind, auf die Ganzheit angewiesen und von ihr her erst voll zu bestimmen; b/ die Teile sind der Ganzheit gegenüber indifferent, ihre Bestimmung läßt ihr Teil-sein zufällig und nicht notwendig erscheinen. Eine Menge besteht aus solchen zu ihr als dem umgreifenden Ganzen indifferenten Teilen; sie werden Elemente genannt.

Eine Menge liegt also nicht als Ganzes den Teilen voraus, sie ist auch nicht zugleich mit ihnen, sondern sie folgt ihnen nach. Eine Menge wird nur zu dem Umgreifenden durch Mengenbildung, die sich auf bereits vorliegende Teile bezieht.

Jeder Zusammenschluß von Teilen als Elementen vollzieht eine Auswahl. Er ist als Zusammenschluß von . . . Abschluß gegen . . . . Die Auswahl verlangt eine Bestimmung des Ausgewählten, die es vor dem Nichtausgewählten gemeinsam auszeichnet. Jeder Menge liegt eine solche Bestimmung oder bestimmende Hinsicht zugrunde. Sie soll mengenbildende Eigenschaft heißen.

Die Elemente einer Menge sind nicht schlechthin identisch. Denn das schlechthin Identische bedarf nicht des umgreifenden Zusammenschlusses, der auf Getrenntes notwendig bezogen ist. Als verschieden sind die Elemente in etwas unterschieden. Als durch eine gemeinsame Bestimmung ausgezeichnet muß ihr Unterschied das Wie des Habens oder Zukommens dieser gemeinsamen Bestimmung betreffen.

Zum Beispiel ist für die Menge aller Menschen die ganzheitsbildende Eigenschaft das Mensch-sein. Der einzelne Mensch aber unterscheidet sich vom anderen durch die Art, wie ihm diese Bestimmung jeweils im besonderen aneignet.

Das Zukommen einer Bestimmung mit Bezug auf einen Gegenstand kann auf das ausweisende Erfassen hin orientiert zweifach verstanden werden: a/ Die Bestimmung kommt zu und ist am Gegenstand ausweisbar, d. h. entweder unmittelbar ausgewiesen und in dieser Ausweisung zu wiederholen, oder aber noch nicht ausgewiesen, jedoch als ausgewiesen jederzeit nachzuholen; b/ die Bestimmung kommt zu und ist nicht ausweisbar, d. h. entweder schlechthin nicht auszuweisen, also dem möglichen Erfassen überhaupt unzugänglich, oder aber prinzipiell zwar auszuweisen, der Weise des Zugangs nach aber verborgen.

Ein Beispiel bietet die Menge aller Kunstwerke einer vergangenen Epoche. Die ganzheitsbildende Eigenschaft entspricht der Bestimmung, ein Kunstwerk einer vergangenen Epoche zu sein. Die Elemente dieser Menge können jetzt geschieden werden in solche, für die schlechthin jede Überlieferung fehlt, und solche, zu deren Kenntnis eine bestehende Überlieferung gelangen läßt. Für die erste Klasse der Elemente ist die Ausweisung des Zukommens der Allgemeinbestimmung schlechthin nicht mehr vollziehbar. Auch die zweite Klasse kann neben den ausweisbaren nichtausweisbare Elemente enthalten, jedoch keine schlechthin nichtausweisbaren, sondern nur solche, bezüglich deren es der Kenntnis einer Überlieferung ‚noch' ermangelt.

Zu der ganzheitsbildenden Eigenschaft, die als eine Allgemeinbestimmung den Elementen einer Menge aneignet, tritt eine Reihe von Einzelbestimmungen hinzu, in denen sich die Elemente einer Menge im besonderen unterscheiden. Zwischen Einzel- und Allgemeinbestimmung, die jedem Mengenelement zumal zugehören, besteht daher ein zweifach gerichteter Bezug: a/ von der Allgemeinbestimmung zu den Einzelbestimmungen, sofern ein Spielraum von Arten möglichen Erfülltseins in ihr liegen muß; b/ von den Einzelbestimmungen zur Allgemeinbestimmung, sofern jene nur eine der Weisen dartun, in denen einem Element die Allgemeinbestimmung zukommen kann.

Von hier aus läßt sich die erste Konstitutionsbedingung für das Mengesein einer Menge formulieren:

I. Zu einer Menge als solcher gehört eine Allgemeinbestimmung, die

   a/ nicht einander widerstreitende Momente enthält,

   b/ den Zusammenschluß der von ihr betroffenen Objekte einen Zusammenschluß von Unterschiedenem sein läßt.

Die erste Teilbedingung sichert rein formal für die Allgemeinbestimmung einen möglichen Umkreis von Objekten. Die zweite Teilbedingung schließt das Fehlen von Elementen oder deren Identität aus.

Das Seinlassen eines Zusammenschlusses durch eine mengenbildende Allgemeinbestimmung birgt in sich das Objektsein-, Gegenstehen-lassen. Gegenstehen aber ist in sich bezogen auf ein Erfassen, dem entgegensteht, für welches das Gegenstehende als das, was es ist, ausweisbar wird. Damit eine Menge als Menge sein kann, hat sie einem möglichen Erfassen entgegenzustehen, in ihrem Mengesein prinzipiell ausweisbar zu sein. Zur ersten Konstitutionsbedingung, die das M e n g e - sein einer Menge betraf, kommt daher eine weitere hinzu, die für das Menge - s e i n einer Menge zu fordern ist.

II. a/ Die eine Menge bildende Allgemeinbestimmung ist in ihrer Verträglichkeit mit sich selbst prinzipiell ausweisbar.

b/ Die Unterschiedenheit ist für gewisse Elemente prinzipiell ausweisbar.

Diese zweite Mengenkonstitutionsbedingung enthält im Grunde nur die ausdrückliche Orientierung der Mengenhaftigkeit auf e n d l i c h e Erkenntnis hin. Sie geht daher nicht eigentlich die Menge als Menge, sondern die Menge als Erkenntnisobjekt an. Ihre ausdrückliche Formulierung soll nur das allzu Selbstverständliche betonen, daß die Ausmaße und die Grenzen endlicher Erkenntnis es sind, die für den zu entwickelnden Horizont von Mengenhaftigkeit überhaupt nur maßgebend sein können. Jede Untersuchung über Mengen hat diese von vornherein als mögliche Gegenstände endlicher Erkenntnis anzusetzen.

Ein erstes Beispiel zur konkreten Verdeutlichung der zweiten Mengenkonstitutionsbedingung ist mit der Menge aller Fermat'schen Zahlentripel gegeben. Sie wird durch die Allgemeinbestimmung gebildet, ein Fermat'sches Zahlentripel zu sein. Bekanntlich liegt von diesen erst ein einziges vor; und es könnte ein unentscheidbares Problem sein, ob es nur ein einziges oder mehrere Fermat'sche Zahlentripel gibt. In diesem Falle aber würde die Allgemeinbestimmung nicht mehr der zweiten Mengenkonstitutionsbedingung genügen, die ihr zugehörigen Elemente nicht als unterschieden für endliche Erkenntnis ausweisbar sein, d. h. sie selbst keine Menge bilden können.

Ein weiteres Beispiel läßt sich außerhalb mathematischer Fragestellung konstruieren mit der Menge aller Kunstwerke der Vergangenheit, von denen jede Überlieferung fehlt. Die Allgemeinbestimmung schließt von vornherein jede Vergegenständlichung von unterschiedenen Objekten, denen sie zukäme, aus. Sie erweist sich also als zur Mengenbildung unfähig.

Ein letztes Beispiel sei der Mengenlehre entnommen. Bekanntlich ist es bisher nicht gelungen, Mengen von gleicher oder größerer Mächtigkeit, als das Kontinuum sie besitzt, wohlzuordnen. Gleichwohl widerspricht die Möglichkeit einer Wohlordnung, wie der Satz von E. Zermelo zeigt, dem Wesen dieser Mengen nicht. Die Menge

der wohlgeordneten (nicht erst wohlzuordnenden) Mengen von gleicher oder höherer Mächtigkeit, als das Kontinuum sie hat, zu bilden, wäre keine Aufgabe, die widersprechende Momente in sich trüge. Es kann aber die bisherige Ergebnislosigkeit aller Bemühungen um eine wirkliche Wohlordnung solcher Mengen im Wesen der Endlichkeit der Erkenntnis selbst begründet liegen. Wäre das der Fall, was allerdings noch nicht einsichtig gemacht werden konnte, so hätte es der zweiten Mengenkonstitutionsbedingung zufolge auch keinen Sinn, von einer Menge solcher schlechthin ungegenständlichen Mengen als unterschiedenen zu sprechen.

Das vorliegende Beispiel kommt darin mit dem ersten überein und unterscheidet sich von dem zweiten insofern, als nicht von vornherein feststeht, ob die in Frage stehende Bedingung in der Tat nicht erfüllt ist. Man würde gegebenenfalls das Paradoxon eines Problems erhalten, das wohl gestellt, aber schlechthin nicht gelöst werden kann — eine die Mathematiker allerdings beschäftigende Problemkonstellation.

Von der Auseinanderlegung der allgemeinsten Mengenbestimmungen aus hat die Untersuchung zu jenen fortzuschreiten, die den Grund mengenhafter Unterschiedenheit abgeben.

Es liegt nahe, die Besonderheit der Mengen in der sachlich je unterschiedenen Bestimmtheit der Allgemein- und Einzelbestimmungen ihrer Elemente zu suchen. In diesem Sinne wäre etwa eine Menge von Menschen von einer Menge von Tieren in jedem Falle zu unterscheiden. — Von vornherein ist zwar klar, daß sachliche Bestimmtheit der Menge und ihren Elementen notwendig und immer zugehören muß. Dieses Angewiesensein auf sachliche Bestimmtheit ist jedoch nichts der Menge als solcher Eigentümliches, sondern darin kommt sie mit jedem anderen Erkenntnisgegenstand überein. Es kann aber aus dem, was für eine Menge als Menge gerade nicht charakteristisch ist, auch nicht der Grund entspringen, wodurch sich Mengen als Mengen unterscheiden.

Aufeinander nicht angewiesene Objekte, wie sie die Elemente einer Menge darstellen, sind von einander geschieden, als geschiedene aus-einander. Solches aber besteht nur in einem Worinnen, innerhalb dessen es sich als Getrenntes von einander unterscheiden kann. Elementehafte Unterschiedenheit fordert ein Worinnen möglichen Getrenntseins. Dieses Worinnen gibt sich als ein Spielraum, der möglichem Unterschiedenen eine Stätte bietet. Nur das kann als Unterschieden-Getrenntes bestehen, was in diesem Spielraum einen eigenen Platz findet. Er ist also allgemein ein Spielraum von Leerstellen, die von Unterschiedenem eingenommen werden, um als solches erst Bestand zu haben.

Die Elemente einer Menge stehen also von vornherein in einem Spielraum von Leerstellen darinnen. Sie werden jeweils einen Teil

seiner in Anspruch nehmen, der dann gerade die Differenzierungen enthält, deren die mengenbildende Allgemeinbestimmung fähig ist. Er soll Differenzierungsspielraum der mengenbildenden Allgemeinbestimmung oder auch der Menge selbst heißen.

Jede Menge wird offenbar durch ihren Differenzierungsspielraum im Besonderen charakterisiert. Er gibt also den Grund dafür her, daß sich Mengen als Mengen zu unterscheiden vermögen. Differenzierungsspielräume von Mengen sind aber dann unterschieden, wenn die Leerstellen des einen nicht ausreichen, um die des anderen zu vertreten, und dann gleich, wenn die Leerstellen des einen für die des anderen gesetzt werden können.

Diese mögliche Kennzeichnung einer Menge im Besonderen hat allerdings zur Bedingung, daß der Menge ihr Differenzierungsspielraum als ein und derselbe bestimmte zugehören kann. Die Bestimmtheit wiederum ist dann gewährleistet, wenn Eindeutigkeit bezüglich der Elemente besteht, die innerhalb seiner einen Platz zu beanspruchen haben.

Die Forderung der Eindeutigkeit erstreckt sich zunächst auf jedes Element der Menge je mit Bezug auf es selbst und bedeutet, daß es je für sich gerade eine und nicht viele Leerstellen einnehmen solle. Denn würde ein Element bald eine, bald mehrere Leerstellen belegen, bliebe der Differenzierungsspielraum der Menge wesensmäßig unbestimmt. — Die Forderung der Eindeutigkeit ergeht sodann an die Elemente je mit Bezug auf einander und bedeutet, daß jedes Element der Menge als ein von sämtlichen anderen unterschiedenes eine Leerstelle besetze. Es bleiben also nicht bald eines, bald viele Elemente außerhalb des Mengendifferenzierungsspielraumes. Denn auch dann wäre dieser unbestimmt.

Soll daher der Differenzierungsspielraum einer Menge diese als je besondere (von anderen bestimmt-unterschiedene) sein lassen, d. h. zugleich Gegenstand sein lassen, sind den ersten beiden Mengenkonstitutionsbedingungen zwei weitere hinzuzufügen.

III. Die mengenbildende Allgemeinbestimmung verleiht den durch sie umgriffenen Elementen Eindeutigkeit sowohl mit Bezug auf sich selbst als auch mit Bezug auf einander.

IV. Die die Bestimmtheit ihres Differenzierungsspielraums ermöglichende Eindeutigkeit der Elemente einer Menge ist prinzipiell ausweisbar.

Mit den gewonnenen vier Mengenkonstitutionsbedingungen hat die erste allgemeinste Mengenhorizontbestimmung ihr Ende erreicht. Eine Konfrontierung mit den in der Cantor'schen Mengendefinition enthaltenen Bedingungen läßt die Einstimmigkeit ersichtlich werden, sodaß die Analyse auch unmittelbar von der Cantor'schen Definition her hätte geführt werden können: „Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Ob-

jekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“ [1]).

Es wird sich jetzt darum handeln, einen Schritt weiterzugehen und die Einblicknahme in den Reichtum des Gebietes zu ermöglichen, das durch die entwickelten Bedingungen in Grenzen gehalten wird. Von vornherein ist klar, daß der Grund der Unterschiedenheit von Mengen in ihren Differenzierungsspielräumen liegt. Sie also müssen auf die mögliche Mannigfaltigkeit ihres Unterschiedenseins hin befragt und eine Klassifikation der Mengen bezw. des Mengenbereichs nach den Arten der möglichen Unterschiedenheit versucht werden.

§ 2.

Zeichen und Zeichensuccession.

Wenn zum Menge-sein einer Menge die Möglichkeit einer Vergegenständlichung gehört, diese aber durch die Bedingtheit einer endlichen Erkenntnis eingegrenzt wird, so sind auch die möglichen Arten einer Unterschiedenheit von Mengen an die Bedingungen geknüpft, denen eine Vergegenständlichung untersteht. Sie zwingen also das Bedingte, d. h. die Mengen, von vornherein in eine bestimmte Form, in der sie überhaupt nur als Mengen entgegentreten und von anderen Mengen sich unterscheiden können. Sollen also die Ausmaße und die Grenzen möglicher mengenhafter Unterschiedenheit ermessen und mit deren Grund das eigentliche Sein von Mengen gewonnen werden, so ist zu allererst jene Form herauszustellen, in der jede Menge als solche durch die aus der Endlichkeit der Erkenntnis erwachsenden Bedingungen ihrer Vergegenständlichung von vornherein gehalten wird. Denn wenn überhaupt, so wird der innere Reichtum des Mengenbereiches nur dadurch zu überschauen sein, daß eben jene allgemeine Form auf ihre Differenzierungskraft hin untersucht wird.

Eine Form, in der eine Menge als Menge sich zeigen kann, hat ihren Differenzierungsspielraum zu offenbaren. Das einzig Anzeigende für diesen sind die Elemente der Menge selbst. An sie hat sich jedes bestimmende Erfassen von Anzahl oder Mächtigkeit zu halten. Jedoch führt keine beliebige Thematisierung der Elemente schon zum Differenzierungsspielraum, sondern, wie sich ergab, nur eine solche, bei der die Elemente als eindeutig gegeben vorliegen und unterschieden sind. Nur dort, wo die Elemente einer Menge im eindeutig auseinandersetzenden Unterscheiden Gegenstand werden, kann sich auch der Differenzierungsspielraum der Menge offenbaren. Jene jetzt thematische allgemeine Form, in der Mengen als Mengen entgegentreten, hat daher die Unterscheidbarkeit der Elemente als ausweisbar eindeutige zu gewährleisten.

---

[1]) Math. Ann. 46. S. 481. — Nur im Zitat gesperrt.

Als erste Form, in der eine Menge als Menge begegnen kann, macht die unmittelbare Anschauung ihre Rechte geltend. In ihr werden die Elemente der Menge als ‚zumal' unterschieden auseinandergesetzt, und es wird mit diesem auseinandersetzenden Unterscheiden der Differenzierungsspielraum der Menge zugleich offenbar. Ein Beispiel bietet etwa die Menge der Punkte einer Würfelseite oder einer Spielkarte. — Doch ein flüchtiger Blick in die Erfahrung lehrt bereits, daß die unmittelbare Anschauung nicht die Form sein kann, in der Mengen als Mengen allgemein gegenständlich werden. Wäre sie es nämlich, so würde der Mengenbereich aufs äußerste zusammenschrumpfen und auf Mengen beschränkt bleiben, auf die er, wie die Erfahrung eben zeigt, in der Tat nicht beschränkt ist. Denn Mengen von wesentlich mehr als 12 Elementen sind, wie auch die psychologische Feststellung ergab, überhaupt nicht mehr in unmittelbarer Anschauung zu erfassen. Dennoch braucht diese Beschränkung unserer endlichen Anschauung in dem als zumal erfolgenden auseinandersetzenden Unterscheiden von Elementen (natürlich keinem ‚ausdrücklichen' Unterscheiden) nicht als psychologisches Faktum hingenommen zu werden und somit die ontologisch gestellte Frage eine ontische Entscheidung zu erfahren. Denn die Beschränkung gründet, zwar nicht als diese bestimmte, aber doch als Beschränkung überhaupt, im Wesen der endlichen Anschauung selbst. Dieses Wesen ist der Grund dafür, daß der Versuch, die unmittelbare Anschauung bereits als allgemeine Form möglicher Mengenvergegenständlichung in Anspruch zu nehmen, mißlingen muß. Allerdings kann diesem Grunde nicht weiter nachgefragt, muß also letztlich doch auf das Faktum der Beschränkung rekurriert werden. Doch würde diese Problematik in die Metaphysik des Daseins gehören und weit ab vom Problem führen.

Es gilt also jetzt sich nach einer allgemeinen Form der Vergegenständlichung von Mengen umzusehen, die nicht allsogleich schon durch die Erfahrung als nicht allgemein genug widerlegt zu werden in Gefahr steht. Eine Voraussage läßt sich über diese Form bereits machen, sofern nämlich die notwendige Unterscheidung der Mengenelemente nicht mehr in einem Zumal, wie es für die unmittelbare Anschauung charakteristisch ist, erfolgen kann. Es bleibt daher die Form der Succession als einzig noch denkbare übrig. Der besondere Charakter einer zur Ermittlung des Differenzierungsspielraumes einer Menge dienenden Succession steht somit zum Problem. Die Entwicklung orientiere sich an seinem Beispiel.

Eine Klasse von etwa 50 Kindern werden auf einem Schulhofe im Spiel beobachtet. Die Bestimmung ihrer Zahl, d. h. des Differenzierungsspielraums der Menge, macht, wie bereits dargelegt, das eindeutige Auseinandersetzen der Kinder als Unterschiedener notwendig. Hierzu bedarf es eines Spielraumes von Leerstellen, innerhalb dessen erst das zu Unterscheidende auf seine Unterschiedenheit

hin befragt werden kann. Dieser Spielraum liegt daher auch im Beispiel vor, und zwar als ein solcher von ausgezeichneter Art. Die Kinder können als sie selbst überhaupt nur in ihrem eigenen Spielraum (und dem unsrigen) entgegentreten: dem Umweltraum. Seine Auszeichnung aber mit Bezug auf die zu unterscheidenden Elemente besteht in der Art, wie er sie als Elemente sein läßt. Das im Umweltraum Befindliche ist auch vorhanden, und zwar so vorhanden, daß an unterschiedenen Plätzen befindliche Dinge nicht nur mit Bezug auf die Plätze, sondern an sich unterschieden sind. Dieser Spielraumcharakter ist keineswegs selbstverständlich. Vielmehr wird gerade der noch herauszustellende für Mengen eigentlich in Frage kommende Spielraum diese Eigenart nicht aufweisen, ja wesensmäßig nicht aufweisen können. Das unterscheidende Auseinandersetzen der Kinder kann daher sowohl in Bezug auf die Plätze, die sie einnehmen, als auch in Bezug auf sie selbst erfolgen.

Mit irgendeinem zuerst aufgegriffenen Element der Menge (Kind der Klasse) wird nunmehr die Unterscheidung ihren Anfang nehmen. Sie hat eindeutig zu sein, ist also in Orientierung auf sämtliche anderen Elemente der Menge durchzuführen. Die Möglichkeit hierzu entspringt dem Wesen der Elemente als solcher, die durch schlechthin unterscheidende Einzelbestimmungen konstituiert sind. Jedem Kinde kommen natürlich eine Unmenge Einzelbestimmungen zu. Aus diesen hat man je nur soviel herauszugreifen nötig, als die Eindeutigkeit ihrer Unterscheidung verlangt. Doch scheint es nicht nur schwierig, sondern auf den ersten Blick unmöglich zu sein, eine Einzelbestimmung der verlangten Art abzugeben; denn formal gesehen, bedarf es einer Kenntnis der Einzelbestimmungen der übrigen Kinder, will man ein bestimmtes Kind durch eine Einzelbestimmung von ihnen abgrenzen. Solche Einzelbestimmungen der übrigen Kinder können aber noch garnicht gegenständlich vorliegen, da ja vorerst mit ihrer Festsetzung begonnen wird.

Die Argumentation träfe zu, wenn die Elemente einer Menge solange, bis sie in ihren Einzelbestimmungen gegenwärtig wären, in jeder Hinsicht unbestimmt blieben. Das ist jedoch garnicht der Fall; vielmehr wird durch die vorliegende Allgemeinbestimmung nicht nur ein Umkreis von Einzelbestimmungen abgegrenzt, die für die Elemente als ihnen zugehörig einzig in Frage kommen können, sondern es besteht auch von vornherein Klarheit darüber, welche Einzelbestimmungen hinreichen, um ein Element so zu charakterisieren, daß jedes andere mit ihm in ihnen übereinstimmende mit ihm identisch ist. Es kann also von vornherein angenommen werden, daß die Einzelbestimmung der Kinder zum Ziel der unterscheidenden Auseinandersetzung so zu vollziehen ist, daß die Eindeutigkeit der Bestimmung eines Elementes mit Bezug auf die anderen Elemente der Menge gesichert bleibt.

Fährt man aber jetzt successive mit der Unterscheidung der Kinder nach individuellen Einzelbestimmungen fort, so muß im Hin-

blick auf das Ziel der Vergegenständlichung des Mengendifferenzierungsspielraumes auch die Eindeutigkeit der Unterscheidung der Elemente mit Bezug auf sie selbst gewährleistet sein. Es muß also im Beispiel unbedingt auszuschließen sein, daß das gleiche Kind mehrfach zur Unterscheidung gelangt. Denn dann würde es für den Differenzierungsspielraum mehrfach zählen, dieser also als ein von vornherein bestimmter ungegenständlich bleiben. — Eindeutigkeit der Unterscheidung kann aber nur dann feststehen, wenn die Ausweisung dieser Eindeutigkeit im Unterscheiden selbst möglich wird. Dieses hat also um sich selbst in irgendeinem Sinne als eindeutig vollzogenes zu wissen. Es gilt zu überlegen, welche Forderungen an das successive Auseinandersetzen der Elemente der Menge zu stellen sind, soll dieses um sich als die Elemente eindeutig mit Bezug auf sie selbst unterscheidend wissen, d. h. als eindeutig ausweisbar sein.

Die Durchführung der successiven Unterscheidung der Elemente der Menge läßt einen Teil der Elemente schon betroffen, einen anderen noch nicht betroffen sein. Die Succession bestimmt also eine Zweiklasseneinteilung der Elemente, deren Änderung solange in Richtung der nicht betroffenen Elemente erfolgt, bis sämtliche Elemente betroffen sind und als betroffen in der ersten Klasse Aufnahme gefunden haben, die zweite aber leer geworden ist. Mit der Eindeutigkeit des successiven Unterscheidens aber ist als Unmöglichkeit gefordert, daß ein Element, das einmal in der ersten Klasse Aufnahme gefunden hat, in die zweite Klasse im Verlauf der Succession wieder zurückfällt. Denn sonst würde eben ein und dasselbe mehrfach unterschieden werden können. Die Ausweisung der Eindeutigkeit der successive unterschiedenen Elemente hat also in nichts anderem zu bestehen als dem Nachweis, daß jedes neu zur Unterscheidung gelangende Element nicht der ersten Klasse der durch die Succession bewirkten Einteilung zugehört.

Um diesen Nachweis aber in jedem einzelnen Fall auch wirklich erbringen zu können, müssen zwei Teilforderungen erfüllt sein. 1/ Die erste Klasse der Einteilung hat in ihrer Gesamtheit im Verlauf der Succession jeweils gegenwärtig zu sein. 2/ Der Vergleich des je neu in der Succession aufgegriffenen Elementes mit den Elementen der ersten Klasse, in welchem es sich als wirklich neu erst zu bewähren hat, muß mit Bezug auf sämtliche Elemente der ersten Klasse geführt, d. h. diese vollständig durchlaufen werden können. — Hiernach besteht die Aufgabe, zu untersuchen, welche spezielle Form der successiven Unterscheidung der Elemente einer Menge den Forderungen genügen könnte, die zum Ziele der Vergegenständlichung des Differenzierungsspielraumes der Menge als eines bestimmten notwendig an die Succession zu stellen sind.

Man könnte zunächst daran denken, daß die unmittelbare Anschauung die Gewähr für die mögliche Erfüllung schon zu bieten

vermöchte. Lassen sich nämlich die Elemente der ersten Klasse jeweils zu einem anschaulich vorliegenden Ganzen zusammenschließen, das nichts anderes als eben sie enthält, so bedürfte es nur der Abwendung von dem so Angeschauten, um die Mehrdeutigkeit des Unterscheidens der Elemente mit Bezug auf sie selbst auszuschließen. In der selbst anschaulich ausweisbaren Abwendung von der Gesamtheit der Elemente der ersten Klasse bewahrt sich das successive Unterscheiden notwendig davor, Elemente der ersten Klasse in die zweite Klasse zurückfallen zu lassen.

In vielen Fällen kann in der Tat derart verfahren werden, etwa im angeführten Beispiel, indem man die Kinder, die durch die Succession betroffen wurden, von den übrigen zur Absonderung bringt. Offenbar aber wird ein solches Vorgehen dort gegenstandslos, wo schon Mengenteile als allzu umfangreich anschaulich nicht mehr zu übersehen sind, oder aber, wo die Elemente der Menge, wie bei der Menge der Tage eines Jahres, überhaupt nichts in der Anschauung Vorliegendes und Zusammenschließbares darstellen.

Es wäre noch zu überlegen, ob nicht die Funktion des Aufbewahrens im Gegenwärtighalten der Elemente der ersten Klasse innerhalb der successive fortschreitenden Unterscheidung und für sie das Gedächtnis übernehmen könnte. Aber abgesehen davon, daß von vornherein schon die Einmischung eines seelischen Vermögens in eine ontologische Analyse mehr als bedenklich scheint, kann auch darauf hingewiesen werden, daß, entsprechend wie die Anschauung, das Gedächtnis nicht deshalb kein geeignetes Mittel darstellt, die Elemente einer beliebigen Menge zusammenhalten, weil wir eben faktisch nicht dazu fähig sind, sondern allein auf Grund dessen, daß wir als endlich Erkennende dazu nicht fähig sein können. Das faktische Unvermögen entspringt erst aus einer wesensmäßigen Gebundenheit.

Wenn aber im allgemeinen die Elemente einer Menge nicht von sich aus Charaktere aufweisen, die die Erfüllung der für das successive Unterscheiden als eindeutiges gestellte Forderungen ermöglichen, wenn andererseits die Absicht nicht aufgegeben werden soll, diejenige Form zu gewinnen, in der allgemein Mengen als Mengen gegenständlich werden können, so bleibt noch übrig, zu versuchen, ob sich das Geforderte, wenn nicht auf direktem Wege erreichen, so vielleicht mittelbar erzwingen lasse. Das aber würde bedeuten, die Elemente einer Menge allgemein durch Stellvertreter zu ersetzen, für welche das für die Elemente selbst Unvollziehbare möglich wäre. Die Ersetzung der Elemente einer Menge durch Stellvertreter zur Thematisierung ihres Differenzierungsspielraumes als eines bestimmten hat zur Voraussetzung, daß der Mengencharakter der Menge unberührt bleibt. Jedem Element hätte also ein Stellvertreter zu entsprechen, durch den es zur Anzeige gelangte, und dieser hätte mit Bezug auf sich selbst und mit Bezug auf die anderen Stell-

vertreter eindeutig zu sein. Da aber diese Stellvertreter nicht völlig beliebig für die ursprünglichen Elemente der Menge gesetzt werden können, sofern man auch nicht wüßte, woher sie zu nehmen seien, müßte ihre Unterschiedenheit in der Unterschiedenheit der Elemente selbst gründen. Das wiederum wäre nur möglich, wenn sie die individuelle Eigenart der Elemente, die sich mit den Einzelbestimmungen ergibt, zum Ausdruck bringen würden.

Wird ein Objekt durch ein anderes es nach gewissen Hinsichten eindeutig darstellendes ersetzt, das diese Darstellungsfunktion nicht von vornherein hat, sondern erst erhalten muß, so nennt man dieses Ersetzende: Zeichen. Die Elemente einer Menge aber sind, wie andere Objekte auch, einer eindeutigen Darstellung durch Zeichen, d. h. einer eindeutigen Bezeichnung fähig. Die Bezeichnung gibt zwar nicht notwendig sämtliche Merkmale des Bezeichneten wieder, aber kann immer diejenigen enthalten, die zur Unterscheidung von anderen Objekten ausreichen.

Zu jeder Bezeichnung gehört also das Bezeichnete, das Objekt, und das Bezeichnende, das Zeichen. Dieses aber kann in mannigfacher Form fungieren, von denen die der Aufzeichnung wohl die wesentlichste darstellt. Sie ist auch der Grund dafür, daß Zeichen in der Tat sich als geeignete Vertreter der Elemente von Mengen zur Bestimmung ihres Differenzierungsspielraums erweisen.

Jede Aufzeichnung kann nur innerhalb eines Spielraums möglicher Aufzeichnungen erfolgen; und Aufzeichenbares läßt sich mit anderem Aufzeichenbaren prinzipiell vereinigen durch einen gemeinsamen Spielraum, innerhalb dessen es zur Aufzeichnung gelangt. Dieser verschiedenen Aufzeichnungen gemeinsame Spielraum soll eine Zeichenliste heißen.

Werden die Elemente einer Menge innerhalb der successiven Unterscheidung durch eindeutige Bezeichnungen ersetzt, die als Zeichen aufgeschrieben und in eine gemeinsame Zeichenliste eingetragen werden können, so zeigt sich mit der stets möglichen Listeneintragung bereits die erste Bedingung für den Nachweis der Eindeutigkeit des successiven Unterscheidens erfüllt: Die Elemente der ersten Klasse der durch die Succession bewirkten Klasseneinteilung können zufolge der möglichen Eintragung ihrer Bezeichnungen in eine gemeinsame Zeichenliste mit dieser aufbewahrt werden und in ihrer jeweiligen Gesamtheit für den Verlauf der Succession gegenwärtig sein. Aber auch ein die Liste vollständig durchlaufender Vergleich des neu zu Bezeichnenden mit dem bereits Bezeichneten wird möglich, wenn man bedenkt, daß die Anordnung der Zeichen in der Liste die Reihenfolge ihrer successiven Entwicklung vollständig wiederzugeben vermag, jede Teilsuccession also innerhalb der Liste zu wiederholen ist.

Mit der Zeichensuccession als dem Nacheinander von eindeutig unterschiedenen Zeichen, d. h. Bezeichnungen, ist jene Form

gewonnen, in der Mengen als Mengen allgemein gegenständlich werden können. Demzufolge schließt das Menge-sein einer Menge notwendig in sich die Korrelation der Elemente zu einer möglichen Abbildung ihrer durch Zeichen. Unter Zugrundelegung dieser allgemeinen Form kann daher zum Versuch einer Klassifikation der Mengen, d. h. einer Befragung des Mengenbereiches auf die Arten möglicher Unterschiedenheit von Mengen hin übergegangen werden.

§ 3.
Das Zeichen- Steigerungsverfahren.

Die Zweiklasseneinteilung der Elemente einer Menge, die durch ihre successive Entwicklung bewirkt wird, bezieht die jeweils getroffenen Elemente als getroffene auf Vergangenheit, die noch nicht getroffenen als treffbare auf Zukunft. Die Elemente einer Menge erhalten also innerhalb der Thematisierung der Menge durch eine Zeichensuccession eine verschiedenzeitliche Orientierung. Diese schlägt dann in eine gleichzeitliche Orientierung um, wenn sämtliche Elemente der Menge, durch die Succession betroffen, auf Vergangenheit bezogen sind. Dieser Umschlag kann aber offenbar nicht von vornherein für jede Menge gefordert werden. Vielmehr stellt gerade das Bestehen der Möglichkeit oder Unmöglichkeit seines Eintretens ein Mittel zu einer Mengenklassifikation dar.

Eine Menge heißt endlich, wenn ihre Elemente durch eine eindeutig unterscheidende Zeichensuccession wesensmäßig gleichzeitlich auf Vergangenheit hin orientierbar sind.

Eine Menge heißt unendlich, wenn ihre Elemente durch eine eindeutig unterscheidende Zeichensuccession wesensmäßig nur verschiedenzeitlich auf Vergangenheit und Zukunft hin orientierbar sind.

Die herausgestellte allgemeine Form der Mengenvergegenständlichung ermöglicht also die erste Klassifizierung. Der Mengenbereich kann in die Teilbereiche der endlichen und der unendlichen Mengen zerfallen. So entstände die Aufgabe, jeden dieser Teilbereiche nach möglichen Arten der Unterschiedenheit des innerhalb seiner Befindlichen zu befragen. Im Folgenden soll jedoch einzig der zweite Teilbereich Berücksichtigung finden, sofern eine nähere Behandlung des ersten von der Allgemeinheit der eingangs gestellten Problematik aus gesehen noch nicht zu rechtfertigen wäre. Denn es wurde gefragt nach dem Umkreis dessen, was als Menge sein und von anderen Mengen sich unterscheiden kann. Das Entwickelte aber konnte deutlich machen, daß in diesen Umkreis die endlichen Mengen jedenfalls hineingehören. Sie genügen den Mengenkonstitutionsbedingungen, und die Art ihres Differenzierungsspielraumes ermöglicht Unterschiedenheit innerhalb des Bereiches. Dagegen ist es bezüglich der unendlichen Mengen sogar noch fraglich, ob ihre Definition nicht Be-

stimmungen enthält, die eine Vergegenständlichung von vornherein ausschließen. Soll deshalb die Behandlung beider Mengenbereiche gleichen Schritt halten, muß zunächst die Frage der Möglichkeit einer Existenz des zweiten Mengenbereiches überhaupt sowie des Grundes möglicher Differenzierungen innerhalb seiner eine Klärung erfahren. Es zieht sich daher die bisher allgemein auf Mengen bezogene Fragestellung auf die unendlichen Mengen zusammen.

Zu allererst wird es sich wieder, um die Möglichkeit einer Vergegenständlichung unendlicher Mengen überhaupt zu sichern, darum handeln, jene allgemeine Form zu umgrenzen, in der überhaupt nur Mengen als unendlich entgegentreten können. Daß diese Form sich der noch allgemeineren der einfachen Zeichensuccession, die für die Vergegenständlichung jeder Menge als Menge charakteristisch ist, einzufügen hat, kann nach dem Vorangehenden als selbstverständlich gelten. Sodann aber wird eine Basis gewonnen sein, um der Frage der Mannigfaltigkeit des Bereiches unendlicher Mengen näherzutreten. Denn wenn es überhaupt Gründe gibt, so muß diese zu umgrenzende allgemeine Form den Grund für die Möglichkeit einer Differenzierung auch unendlicher Mengen mit Bezug auf ihre Mächtigkeit in sich bergen.

Die gegebene Definition der unendlichen Menge enthält die der endlichen mit, und kann nur mit Bezug auf sie verstanden werden. Jede, auch die mathematische, scheinbar positive Bestimmung des Unendlichseins von Mengen setzt Hinblick auf Endlichkeit, d. h. ein Verständnis des Endlichseins von Mengen voraus. Die Unterschiedenheit endlicher und unendlicher Mengen in ihrem Differenzierungsspielraum kommt in einer negativen Formulierung des Unendlichseins noch besser zum Ausdruck: Eine Allgemeinbestimmung bildet dann eine unendliche Menge, wenn jede endliche Menge von Elementen dieser Allgemeinbestimmung ihren Differenzierungsspielraum wesensmäßig nicht zu erschöpfen vermag.

Eine unendliche Menge wird definiert durch eine unendliche, d. h. zunächst an kein Ende gelangende Zeichensuccession. Sie kann daher als solche nur Gegenstand werden, wenn die Möglichkeit besteht, das An-kein-Ende-kommen einer Zeichensuccession auszuweisen. Man wäre geneigt, das Bestehen einer solchen Möglichkeit vorerst zu verneinen, da es in keiner Weise ersichtlich scheint, wie sich in einer Zeichensuccession und für sie das Nicht-an-ein-Ende-gelangen bemerkbar machen könnte. So entsteht die Aufgabe der konstruktiven Entwicklung der Bedingungen für eine solche Möglichkeit und damit der Bedingungen für eine Vergegenständlichung unendlicher Mengen.

Eine unendliche Zeichensuccession zerfällt in vorliegende und nichtvorliegende Bezeichnungen. Wäre aber das Nichtvorliegende in gar keiner Weise für die Succession gegeben, so könnte diese sich niemals als unendlich erweisen. Denn das jeweils als vorliegend

Gegebene bildet immer nur eine endliche Menge. Das Nichtvorliegende hat also als Noch-nicht-Vorliegendes für die Succession in gewisser Weise zu erscheinen.

Das In-die-Erscheinung-treten eines Noch-nicht-Vorliegenden aber kann nur vom bereits Vorliegenden her und nur dann erfolgen, wenn ein notwendiger Bezug das eine mit dem anderen verbindet. Der Bezug hat also von der Klasse der vorliegenden Bezeichnungen bezw. Elemente zu der der nichtvorliegenden Bezeichnungen oder Elemente zu führen. Nur dann wäre die verschiedenzeitliche Orientierung der Elemente, d. h. die Notwendigkeit der Zweiklasseneinteilung als ausweisbar anzusetzen.

Der bestehende und zu vergegenständlichende Bezug darf aber kein vager, unbestimmter sein, sondern er hat die Existenz des Nochnichtgegebenen als gleichwohl zur Menge gehörig vom Gegebenen her zu verbürgen. Er trägt also den Charakter der einseitigen Anzeige. Eine solche Anzeige kann aber nur dann ankündigend und existenzverbürgend sein, wenn sie von sich aus das Angezeigte zum Sichzeigen zu zwingen vermag, d. h. eine Anweisung über die sichere Weiterführung der Succession über jeden je erreichten Stand hinaus geben kann.

Hiernach würde über die Führung einer unendlichen Zeichensuccession, d. h. die Abfolge der durch sie betroffenen Elemente der Menge — immer vorausgesetzt, die Konstruktion der Bedingungen ihrer Möglichkeit gelänge — nicht irgendein Belieben entscheiden, sondern jene, mit den je gegenwärtigen Elementen immer schon mitgegebene, Anweisung. Sie schafft eine Bindung zwischen der Menge des bereits Entwickelten und dem innerhalb der Succession neu zu Entwickelnden, sodaß durch diese Bindung der Entwicklungsprozeß selbst ein gebundener wird. Gebundenheit in der Weise der Abfolge ihrer Elemente ist für die Vergegenständlichung einer unendlichen Menge als solcher wesentlich. Wie weit sich diese Gebundenheit auf die Zeichen der Succession selbst erstreckt und nicht nur eine gewisse, sondern jede Beliebigkeit ihrer auszuschließen ist, wird noch zu erörtern sein.

Eine Anweisung, die eine Zeichensuccession nach Abfolge oder Art der Bezeichnungen oder in beider Hinsicht von vornherein bestimmt, heißt eine Regel. Unendliche Zeichensuccessionen sind regelgebunden.

Die unterscheidende Entwicklung eines jeden Elementes der Menge innerhalb der Succession von Zeichen wird zufolge der Regel durch das bereits Gegenwärtige in seiner Gesamtheit mitbestimmt. Die Regel aber kann einen solchen Bezug nicht verleihen, wenn ihr nicht ein sachliches Aufeinanderverweisen der Elemente zugrundeliegt. Nur weil die Elemente in sich mit Bezug auf einander eine sachliche Verbundenheit aufweisen, kann sich eine Regel dieser bemächtigen und auf Grund der Verbundenheit ihre Abfolge regeln.

Zu Beginn der Untersuchungen war die Indifferenz der Elemente einer Menge ihr als dem Ganzen gegenüber hervorgehoben werden. Darin lag zugleich Nichtabhängigkeit von einander und Nichtangewiesensein der Elemente aufeinander. Diese als allgemein sich gebende Kennzeichnung ist zu berichtigen. Für endliche Mengen behält sie allerdings ihre Gültigkeit, sofern deren Vergegenständlichung keine Regelabhängigkeit aufweist. Unendliche Mengen aber sind als solche regelgebunden, und eine sachliche Abhängigkeit der Elemente von einander hat bei ihnen in dem Maße zu bestehen, als es der allgemeine Charakter der sie zur Entwicklung bringenden Regel verlangt. Je vollständiger eine Zeichensuccession im allgemeinen sich durch eine Regel gebunden zeigt, umso geringer wird der Spielraum für die Eigenart der Elemente, die innerhalb ihrer zur Entwicklung gelangen. Die Elemente einer unendlichen Menge sind von vornherein durch ihre Mengenzugehörigkeit ihrem Wasgehalt nach gewissen Bedingungen unterworfen, die für die Elemente endlicher Mengen aus ihrer Mengenzugehörigkeit prinzipiell nicht erwachsen können. Hiermit ist schon angedeutet, daß der Ganzheitscharakter der unendlichen gegenüber dem der endlichen Mengen ein völlig neues Ansehen erhält, das offensichtlich macht, daß verschiedene der zuerst aufgestellten Mengenbestimmungen einzig in der Orientierung an endlichen Mengen gewonnen werden konnten [1]).

Die eine unendliche Menge als solche bestimmende Regel ist jedoch nicht nur für die Abfolge der Elemente bindend, ja nicht einmal unmittelbar für diese. Denn unmittelbar kann die Regel nur auf die Zeichen der unendlichen Zeichensuccession bezogen sein, mittels deren erst das Unendlichsein der Menge offenbar zu werden vermag. Sie hat also zunächst eine Anweisung darüber darzustellen, wie sich von jedem beliebigen Stand der Succession aus zu weiteren Zeichen gelangen lasse, die noch nicht bezeichneten Elementen der Menge entsprechen. Es gilt daher zu überlegen, welchen Charakter die Zeichen einer Succession haben müssen, damit eine

---

[1]) Es läge nahe, zu fragen, wie weit das Unendlich-sein einer Menge nicht nur das Was-sein, sondern auch das Wie-sein der Elemente determiniert. Eine erste Antwort ergibt sich, sofern aus ‚Vorhandenem' keine Allgemeinbestimmung eine unendliche Menge zu bilden imstande ist. Es gibt eben keine Regel, die a priori zu jeder beliebigen Menge von successive unterschiedenem Vorhandenen weiteres Vorhandene beizubringen vermöchte, sofern über Vorhandensein eines Vorhandenen immer nur a posteriori in der Erfahrung, d. h. im Verlauf der Succession selbst, aber nie im vorhinein, entschieden werden kann. Vgl. Kant, Kritik d. r. V., Antinomie der reinen Vernunft, 1. Antinomie, insbesondere auch B 459 Anm. zu Thesis, wo „der transzendentale Begriff der Unendlichkeit" definiert wird. — Wenn aber nicht durch die Seinsart des Vorhandenen, so wäre zu fragen, durch welche Seinsart dann die Elemente unendlicher Mengen konstituiert sein können. Vielleicht vermag die alte Einteilung von φύσει ὄντα und τέχνῃ ὄντα eine gewisse Anleitung zu geben.

Regel in der angegebenen Weise das Nicht-an-ein-Ende-gelangen der Succession anzuzeigen imstande ist. Hierzu wird es notwendig, die Zeichen einer Succession nach allgemeineren Bestimmungen festzulegen.

Zeichen im Sinne des Bezeichnenden und Gezeichneten in Einem sind einfach oder zusammengesetzt. Sie heißen einfach, wenn sie keine Teile haben, die schon für sich bezeichnen, und zusammengesetzt, falls sie Teile haben, die mit Bezug auf die zu unterscheidenden Elemente schon für sich bezeichnen. Jedes zusammengesetzte Zeichen besteht aus einfachen, und es kommt ihm zufolge der dimensionalen Erstreckung ein gewisser Aufbau zu. Das Gleiche gilt für die Zeichensuccession selbst. Sie ist eindeutig charakterisiert, wenn die Zeichen, aus denen sie besteht, und die Art ihres Aufbaus in einer Zeichenliste bestimmt sind.

Das zusammengesetzte Zeichen, das also aus Teilzeichen besteht, die schon für sich bezeichnen, scheint, von seinem Aufbau einmal abgesehen, auch selbst als Zeichenmenge aufgefaßt werden zu können. Für eine Menge ist konstitutiv die Unterschiedenheit der Teile. Ein zusammengesetztes Zeichen wird nur dann als Menge fungieren können, wenn die einfachen Zeichen, aus denen es zusammengesetzt ist, unterschieden sind. Ein Grund für eine solche Unterschiedenheit als eine notwendige kann aber nicht angegeben werden. Denn für die zusammengesetzten Zeichen der Succession ist einzig gefordert, daß sie, Unterschiedenes bezeichnend, selbst gegeneinander unterschieden sind, nicht aber, daß sie aus unterschiedenen Teilen zu bestehen hätten. Es wird sich sogar als Bedingung der Möglichkeit für das Unendlichsein einer Menge ergeben, daß die Zeichen der sie ausweisenden Succession als zusammengesetzte aus jeweils gleichen einfachen Zeichen zusammengesetzt sind.

Sofern also für das Folgende diese Unterscheidung bedeutsam wird, soll ein auf ein Mengenelement bezogenes zusammengesetzes Zeichen, in dem sich wesentlich die gleichen einfachen Zeichen wiederholen, ein Quantum genannt, dagegen dann von einer Zeichenmenge gesprochen werden, wenn die einfachen Zeichen als die Teile der Zusammensetzung je Unterschiedenes bezeichnen.

Der möglichen Zusammengesetztheit der Zeichen der Succession kann ein Zusammengesetztsein der Elemente der Menge entsprechen, und zwar kann es durch die Zeichen adäquat oder inadäquat wiedergegeben werden, je nachdem, ob sich die Teile von Element und Zeichen aufeinander abbilden oder nicht abbilden lassen. Bei inadäquater Wiedergabe ist noch zu unterscheiden zwischen einer notwendig oder nicht notwendig inadäquaten Bezeichnung. So bezeichnet das Zeichen 3 nicht notwendig inadäquat, die in der Zahl selbst liegende Gliederung könnte auch adäquat wiedergegeben werden, etwa durch das Zeichen III. Dagegen bezeichnet das Zeichen π oder $\sqrt{2}$ notwendig inadäquat. Sind also die Elemente der un-

endlichen Mengen selbst unendlich zusammengesetzt, d. h. bilden sie Mengen oder Quanta, deren Zusammensetzung innerhalb keiner endlichen Succession zu erfolgen vermag, so ist die adäquate Bezeichnung ihres Zusammengesetztseins in der ausweisenden Succession nicht möglich. Denn deren Zeichen sind selbst nur endlich zusammengesetzt, d. h. ihre Eintragung in die Zeichenliste kann in endlicher Succession erfolgen. Ohne diese Bedingung würden die Zeichen nicht mehr der Forderung der Eindeutigkeit genügen oder die Succession selbst über einen bestimmten Stand nicht hinauskommen.

Ein Zeichen gelangt erst dadurch zum Zeichen-sein, d. h. zu der ihm eigenen Existenz, wenn es sowohl als Gezeichnetes wie als Bezeichnendes voll bestimmt ist. Eine Regel kann also nur die Existenz solcher noch nicht vorliegender Zeichen verbürgen, die in sich bereits vollständig bestimmt sind. Das aber eine Zeichensuccession nach ihrer Abfolge oder der Art ihrer Bezeichnungen Vorausbestimmende wurde Regel genannt. So ergibt sich, daß eine Regel nur dann die Abfolge der Zeichen einer Succession zu regeln vermag, wenn sie auch ihr Aussehen, d. h. das Wie ihres Bezeichnens, von vornherein festlegen kann. Soll eine Regel eine unendliche Zeichensuccession als unendliche zur Darstellung bringen, so muß über das Aussehen der zur Entwicklung gelangenden Zeichen schon immer entschieden sein.

Ein Zeichen wird in seinem Aussehen, d. h. als Gezeichnetes, durch die einfachen Zeichen bestimmt, aus denen es zusammengesetzt ist, und durch deren Aufbau. Im jeweiligen Aussehen gründet die Unterschiedenheit der Zeichen voneinander. Soll sich daher das Aussehen einer unendlichen Menge von Zeichen vorausbestimmen lassen, so muß auch eine unendliche Verschiedenheit von Zeichen eindeutig festgelegt werden können, d. h. es müssen Unterschiedenheiten zu bestimmen sein, ohne daß die Unterscheidung zu vollziehen notwendig wäre. Die Art der Unterschiedenheit von Zeichen, für welche eine solche Regelung möglich ist, gilt es zu untersuchen.

Unterschiedene einfache Zeichen sollen qualitativ unterschieden heißen. Zusammengesetzte Zeichen sollen qualitativ unterschieden heißen, die sich sowohl als Ganzes, als auch mit Bezug auf die Teile, aus denen sie bestehen, unterscheiden. Zusammengesetzte Zeichen sollen quantitativ unterschieden heißen, die sich zwar als Ganzes, aber im wesentlichen nicht mit Bezug auf die Teile, aus denen sie bestehen, unterscheiden. Es ist zu überlegen, welche Art der Unterschiedenheit den regelgebundenen Zeichen einer unendlichen Zeichensuccession nur zukommen kann.

Wären die Zeichen der Succession im wesentlichen qualitativ von einander unterschieden, so beständen sie aus immer neu unterschiedenen einfachen Zeichen, und die Regelung der unendlichen Zeichensuccession würde sich im wesentlichen auf die Regelung einer unendlichen Menge einfacher Zeichen zu erstrecken haben. Jedes

Zeichen aber hat mit Bezug auf die qualitativ von ihm unterschiedenen einfachen etwas Besonderes an sich, das von jenen her noch nicht zu übersehen ist. Denn wäre es zu übersehen, so hätte jenes Teile, in denen dieses Besondere enthalten sein würde. Es hätte also Teile, die schon für sich bezeichnen, jenes Besondere nämlich, und wäre nicht mehr einfach. Ist aber jedes einfache Zeichen von anderen einfachen Zeichen her nicht zu übersehen, dann kann es auch keine Regel geben, die aus einer beliebigen Menge ihrer weitere in vorbestimmter Weise zu entwickeln gestattet. Denn Vorausbestimmung heißt eben, daß von jeder endlichen Menge solcher Zeichen aus die Besonderheit eines weiteren zu überschauen ist. Kann eine Regel dieses prinzipiell bezüglich qualitativ unterschiedener Zeichen nicht leisten, dann kann sie auch die Existenz solcher Zeichen nicht verbürgen, die als in ihrer Besonderheit ausgewiesen noch nicht vorliegen.

Es bleibt übrig, daß die Regel auf im wesentlichen quantitativ unterschiedene Zeichen bezogen ist. Soll aber die Regel das Aussehen der Zeichensuccession bestimmen können, muß sie von vornherein über die einfachen Zeichen verfügen, die als die ständig wiederkehrenden für die Succession maßgebend sind. Diese Verfügungsmöglichkeit im voraus besteht aber nur dann, wenn die Zeichen, die in den Zusammensetzungen der Succession ständig wiederkehren, selbst eine endliche Menge darstellen. Denn andernfalls gäbe es Zusammensetzungen, die wesensmäßig nicht vorausbestimmbar wären. Eine solche endliche Menge unterschiedener einfacher Zeichen, aus denen die Zeichen einer Zeichensuccession einzig bestehen und über die eine die Succession konstituierende Regel verfügen muß, um wirklich konstituieren zu können, soll im Hinblick auf die Funktion der Zeichen ein endliches Bezeichnungssystem heißen.

Das einzige Mittel aber, das eine auf ein endliches Bezeichnungssystem gestützte Regel eine unendliche Zeichensuccession determinieren läßt, ist die successive Steigerung der jeweiligen Zeichenzusammensetzung um die gleichen einfachen Zeichen bei vorgeschriebenem Aufbau. Nur eine solche unbegrenzte successive Steigerung vermag eine Regel eindeutig vorauszubestimmen, die Zeichen als Quanta in ihrer Existenz verbürgend, d. h. in ihrem Aussehen vollständig festlegend. Was einer aussehenbestimmenden Regel in grenzenlosem Fortgang im voraus unterstehen kann, ist also im Grunde nur die ständige Wiederholung des Gleichen, die, als Vermehrung um ein Gleiches vollzogen, zu immer Neuem zu führen vermag.

Die Bedingung der Möglichkeit dafür, daß eine unendliche Zeichensuccession als unendliche Gegenstand werden und das Unendlichsein einer Menge auszuweisen vermag, besteht im Vorliegen einer Regel, welche, auf ein endliches Bezeichnungssystem gestützt,

die Zeichen der Succession als (quantitativ unterschiedene) Quanta zur Entwicklung bringt. Eine so geartete unendliche Zeichensuccession soll ein Zeichen-Steigerungsverfahren heißen.

Mit dem Zeichensteigerungsverfahren ist aber die allgemeine Form gewonnen, mittels deren überhaupt unendliche Mengen als unendliche Gegenstand werden können. Sofern aber das Aussehen der Zeichen des Verfahrens durch die es konstituierende Regel von vornherein festliegt, dieses Aussehen aber nur der Bezeichnung von Mengenelementen dient, wird den unendlich vielen Elementen selbst sämtlich durch das Verfahren ein mögliches Aussehen, in dem sie unterscheidbar werden, zugewiesen, und nur weil diese Zuweisung schon stattfinden konnte, läßt sich die Menge selbst als unendliche ausweisen.

Die Beschränkung, der die Elemente einer unendlichen Menge ihrem Wasgehalt nach durch ihre Mengenzugehörigkeit unterworfen sind, geht also so weit, daß nur jene Allgemeinbestimmung fähig ist, eine unendliche Menge zu bilden, für welche die Einzelbestimmungen der durch sie betroffenen Objekte im Zeichensteigerungsverfahren zu entwickeln sind. Von den Elementen einer unendlichen Menge läßt sich daher auch die Charakteristik nicht mehr aufrechterhalten, der gemäß die Teile dem Ganzen vorausliegen (z. vgl. S. 2), sondern Ganzes und Teil, Menge und Element bedingen sich hier in gewissem Sinne wechselseitig. Doch soll auf die Eigenart dieses Verhältnisses nicht weiter eingegangen werden.

§ 4.
Zeichenbezug und Zeitbestimmtheit unendlicher Mengen.

Unendliche Mengen sind, wie sich ergab, auf Regeln bezogen, die ihren sämtlichen Elementen mit einer möglichen Bezeichnung ein Aussehen verleihen, besser verliehen haben. Denn nur sofern die Art der Bezeichnung von vornherein geregelt ist, kann eine Regel eine Zeichensuccession als unendliche ausweisen. Darin aber besteht zugleich ein entscheidender Unterschied der endlichen und der unendlichen Mengen. Für endliche Mengen können innerhalb der vergegenständlichenden Zeichensuccession die einzelnen Zeichen und entsprechend die Elemente successive ein Aussehen erhalten, sodaß dieses also zur Durchführung des Prozesses von vornherein nicht festzustehen braucht. Denn endliche Zeichensuccessionen gelangen von sich aus zu ihrem Ende, vermögen von sich aus sämtliche Elemente der Menge zu bezeichnen und sie eindeutig unterschieden auszuweisen. Für unendliche Mengen aber besteht diese Möglichkeit nicht. Wäre dort die Erlangung eines Aussehens durch die Bezeichnung von der successiven Unterscheidung selbst abhängig, so könnte die Succession als grenzenlose nicht mehr gegenständlich sein. Das

Unendlichsein einer Zeichensuccession setzt eben als Bedingung ihrer Möglichkeit voraus, daß die innerhalb ihrer zur Unterscheidung gelangenden Zeichen voll eindeutig in ihrem Aussehen vorausbestimmt sind. Es zeigte sich aber, daß diese Erlangung eines Aussehens, d. i. einer Bezeichnung, für die Elemente einer unendlichen Menge zumal einzig durch eine als Steigerungsverfahren bestimmte Zeichensuccession zu gewährleisten ist.

Die wesensmäßig verschiedenzeitliche Orientierung der Elemente einer unendlichen Menge mit Bezug auf die durch die successive Unterscheidung bewirkte Zweiklasseneinteilung gründet also ihrer Möglichkeit nach in einer gleichzeitlichen Orientierung der Elemente auf Vergangenheit hin mit Bezug auf eine mögliche Bezeichnung, die ihnen durch die die Zeichensuccession konstituierende Regel zugewiesen wird. Dieser zweifach sich äußernde Zeitbezug der Elemente einer unendlichen Menge, einmal im Hinblick auf ihre Unterscheidung, sodann im Hinblick auf ein zu gewinnendes Aussehen, ist für das Unendlichsein einer Menge als solches charakteristisch.

Wenn aber der Grund für die mögliche Vergegenständlichung unendlicher Mengen in der regelgebundenen Zeitbestimmtheit ihrer Elemente liegt, dann wird die Differenzierungskraft des Grundes abhängen von den Modifikationen, deren diese regelgebundene Zeitbestimmtheit der Elemente von sich aus fähig ist. Denn eine andere Differenzierungsmöglichkeit kann in dem Grund mengenhafter Unendlichkeit schlechthin nicht gefunden werden. Sofern jede unendliche Menge auch durch Steigerungsverfahren konstituiert sein muß, für die von einem solchen getroffenen Elemente aber die Zeitbestimmtheit bereits festliegt, so entsteht mit der Frage nach den möglichen Abwandlungen dieser mit Bezug auf die Elemente der Menge zugleich das Problem der Möglichkeit von Verfahren, die in prinzipiell anderer Weise als das Steigerungsverfahren eine unendliche Menge als unendliche determinieren und die Möglichkeit unterschiedener Differenzierungsspielräume für unendliche Mengen selbst darlegen.

Die Zeitbestimmtheit der Elemente einer unendlichen Menge ergab sich aus ihrer Bezogenheit auf ein mögliches Aussehen (Bezeichnung), in dessen Besitz sie sich allgemein von vornherein nie befinden, sondern nur mittels Zeichen einer Zeichensuccession gelangen können. Diese Bezogenheit der Elemente einer unendlichen Menge ist aber prinzipiell einer dreifachen Abwandlung fähig, sofern ein Element in einem dreifachen Verhältnis zu seiner möglichen Bezeichnung stehen kann als einer solchen, die es 1/ bereits erlangt hat, 2/ einmal erlangen wird, 3/ vielleicht einmal erlangen wird. Dieser dreifachen Bezogenheit entspricht die dreifache Zeitbestimmtheit durch Vergangenheit, Zukunft (im Sinne des einmal Gegenwärtigen) und Möglichkeit[1]). Denn Elemente, die im Besitz von etwas

[1]) Zeit und Zeitmodi gelangen hier und im unmittelbar Folgenden noch in durchaus v u l g ä r e m, d. h. unphilosophischem Sinne zur Verwendung.

stehen, haben einmal Besitz ergriffen; die aber einmal stehen, werden in Zukunft Besitz ergreifen; und die vielleicht einmal stehen, haben wesensmäßig die Möglichkeit, in Zukunft Besitz zu ergreifen. Hiermit aber sind die möglichen Formen einer für die Elemente einer unendlichen Menge maßgebenden Zeitbestimmtheit erschöpft.

Unendliche Mengen können daher prinzipiell in drei Klassen von Elementen zerfallen, in Elemente, die auf Vergangenheit, in solche, die auf Zukunft, und solche, die auf Möglichkeit hin mit Bezug auf ihre Bezeichnung orientiert sind. Jede unendliche Menge wird von der ersten Klasse unendlich viele Elemente enthalten. Denn nur dadurch wird sie als unendliche gegenständlich. Unendliche Mengen aber, die nur Elemente der ersten Klasse enthalten, können in gewissem Sinne für die kleinsten unendlichen Mengen gelten. Denn ihre Elemente sind sämtlich eines Charakters. Es kann jedoch unendliche Mengen geben, die wesensmäßig sowohl Elemente der ersten wie solche der zweiten Klasse enthalten, für die also die zweite Klasse nicht leer zu werden vermag, auch wenn aus ihr ständig Elemente in die erste Klasse hinüberfallen. Die erste Klasse reicht also in keinem Falle aus, um die Elemente der Menge vollständig zu umgreifen. Eine solche Menge könnte daher in gewissem Sinne für ‚größer' gelten als eine nur Elemente der ersten Klasse enthaltende Menge. Es sind schließlich durch Allgemeinbestimmungen gebildete unendliche Mengen denkbar, die Elemente aller drei Klassen enthalten, und zwar wesensmäßig, sodaß es prinzipiell ausgeschlossen bleibt, daß die Elemente verlierende zweite und dritte Klasse jemals leer zu werden vermöchte. Dann reichen also die erste und zweite Klasse von Elementen in keinem Falle aus, um die Elemente der ganzen Menge zu umfassen, und diese könnte für in gewissem Sinne ‚größer' gelten als Mengen, die nur Elemente der ersten und zweiten Klasse enthalten.

Es besteht also ein erster Hinweis darauf, daß die einer dreifachen Artung fähige Zeitbestimmtheit der Elemente unendlicher Mengen ein dreifach unterschiedenes Unendlichsein von Mengen bewirken könnte. So erwächst die Frage nach der Möglichkeit der Vergegenständlichung dieser Mengen und der Eigenart, die sie innerhalb einer solchen aufweisen müßten. Die folgende Analyse, für welche der gegebene Hinweis die Perspektive darstellt, in der sie erfolgt, hat daher den Versuch zu machen, aus den bereits vorliegenden Charakteren unendlicher Mengen jene weiteren zu entwickeln, aus denen die Möglichkeit einer dreifachen Unterschiedenheit des Bereiches der Mächtigkeiten ersichtlich wird.

Eine unendliche Menge, die nur Elemente der ersten Klasse enthält, ist in der Entwicklung ihrer Elemente von jeder Beliebigkeit ausgeschlossen. Es besteht absolute Bindung an die einem endlichen Bezeichnungssystem erwachsende Regel. Der Zeichensuccession ist ihr Verlauf in jeder Hinsicht zugemessen. Es soll deshalb von der

dimensionalen Gebundenheit des Steigerungsverfahrens gesprochen werden.

Sofern innerhalb eines dimensional gebundenen Verfahrens über die Bezeichnung der Elemente der durch das Verfahren bestimmten Menge entschieden ist, können auf dem Grunde seiner weitere Steigerungsverfahren ansetzen, die eine Neubezeichnung der Elemente vornehmen, d. h. sämtlichen Elementen zumal ein neues Aussehen verleihen. Das Grundbeispiel hierfür bietet die Bezeichnungsweise der natürlichen Zahlen. Es basiert nämlich jedes geeignete Bezeichnungsverfahren dieser auf einem Grundverfahren, für welches jedes Zeichen soviel einfache enthält, als die Zahl angibt, die es bezeichnet. Die übliche Bezeichnungsweise nach dem indischen Ziffernsystem ist daher als Neubezeichnungsverfahren zu verstehen, das auf dem Grundbezeichnungsverfahren der natürlichen Zahlen aufbaut. Die Möglichkeit hierzu besteht aber nur zufolge der dimensionalen Gebundenheit der die eindeutige Bezeichnung eines jeden Elementes der unendlichen Menge von vornherein bestimmenden Zeichen-Steigerungsverfahren.

Die durch endliche Bezeichnungssysteme konstituierten dimensional gebundenen Bezeichnungsverfahren bestimmen unendliche Mengen, die die Mengenlehre abzählbar nennt. Sie stellen die Grundklasse der unendlichen Mengen dar, die das Unendlichsein als solches erst offenbar macht, die daher jede unendliche Menge als Teilmenge zu enthalten hat. So hätte es auch einen guten Sinn, von diesem abzählbar Unendlichen als dem aktual-Unendlichen zu sprechen, sofern eine Regel vorliegt, die sämtlichen Elementen der Menge zumal eine Bezeichnung ‚wirklich' zuweist, jedes Element in den Besitz eines Aussehens, in dem es einem endlichen Erfassen entgegentreten kann, wirklich gelangen läßt. Daß Aktualität nicht im Sinne der wirklich vollzogenen Unterscheidung der Mengenelemente zu verstehen ist, muß als selbstverständlich gelten. Denn sonst wäre der Begriff des Unendlichen selbst aufgehoben.

Soll aber die Möglichkeit zur Existenz von Mengen bestehen, die einen den abzählbaren Mengen gegenüber größeren Differenzierungsspielraum aufweisen, so darf das Steigerungsverfahren nicht das einzige mengenbestimmende Bezeichnungsverfahren sein. Es müßte vielmehr für die Elemente einer Menge Entwicklungsverfahren geben, die zwar das Steigerungsverfahren einschließen, aber sonst gewissen Einschränkungen seiner enthoben sind. Es gilt zu überlegen, ob das Steigerungsverfahren von sich aus einer Entschränkung fähig ist, die eine Anweisung auf die Eigenart eines umfassenderen Verfahrens zu geben vermöchte.

Die wesentliche und notwendige Beschränkung eines dimensional gebundenen Verfahrens liegt in der Endlichkeit des Bezeichnungssystems, dem seine Regelung erwächst. So entsteht das Problem der Möglichkeit und Eigenart eines Verfahrens, das zu seiner

vollständigen Regelung eines unendlichen Bezeichnungssystems bedürfte. Denn mit einem solchen Verfahren würde in der Tat eine dem Steigerungsverfahren als wesentlich anhaftende Beschränkung zur Aufhebung gelangen. Da aber der Begriff eines unendlichen Bezeichnungssystems noch ungeklärt blieb, wäre dessen möglichem Sinn erst einmal nachzufragen.

Jedes Bezeichnungssystem umfaßt eine Menge von qualitativ unterschiedenen Zeichen, bezw. Bezeichnungen, die aus einander nicht mehr ableitbar sind. Die Bestimmung eines jeden Zeichens nach Bezeichnungsfunktion und Aussehen kann immer nur mit der Gegenwart des Zeichens selbst vorliegen. Nach Vorangehendem ist es daher unmöglich, eine unendliche Menge solcher Zeichen, d. h. aber ein unendliches Bezeichnungssystem als unendlich von sich aus auszuweisen. Es hat also zunächst überhaupt keinen Sinn, von Unendlichkeit eines Bezeichnungssystems zu reden, wenn Unendlichkeit in der definierten Bedeutung des Unendlichseins von Mengen verstanden wird. Soll die Redeweise doch beibehalten werden, so ist ihr ein möglicher Sinn erst zu verleihen.

Ein Bezeichnungssystem enthält seiner Bedeutung nach alle jene einfachen Zeichen, durch deren Zusammensetzung den Elementen einer unendlichen Menge zufolge einer verknüpfenden Regel zu einer Bezeichnung verholfen wird. Eine Menge ist durch ein endliches Bezeichnungssystem bestimmt, heißt dann, es genügt eine endliche Menge einfacher Zeichen, um sämtlichen Elementen durch im voraus geregelte Zusammensetzungen ein Aussehen zu verleihen. Es ist aber denkbar, daß durch Allgemeinbestimmungen Mengen gebildet werden, deren Elemente durch kein endliches Bezeichnungssystem sämtlich bezeichnet werden können, indem jedes beliebige, aber endliche Bezeichnungssystem auf Elemente notwendig verweist, die innerhalb seiner noch keine Bezeichnung gefunden haben. Von einer solchen Menge läßt sich dann sagen, sie sei durch ein unendliches Bezeichnungssystem bestimmt; das heißt eben nur, es besteht keine Möglichkeit, die Elemente der unendlichen Menge jemals vollständig zu bezeichnen.

Eine so geartete Menge wäre zunächst durch eine Zweiklasseneinteilung zu charakterisieren derart, daß in die eine Klasse die Elemente fallen, die eine Bezeichnung durch ein endliches System erlangten, und in die andere Klasse die übrigen. Die Zweiklasseneinteilung bringt also den besonderen Unendlichkeitscharakter der Menge zum Ausdruck. Soll er gegenständlich werden, muß die Einteilung selbst ausweisbar sein. Die zweite Klasse aber umfaßt Elemente, die so wenig gegeben vorliegen, daß sie noch nicht einmal eine Bezeichnung gefunden haben. Sie vermögen also von sich aus nicht zur Anzeige zu gelangen. Es hat daher für die Möglichkeit einer Vergegenständlichung ein notwendiger Bezug zwischen der ersten und zweiten Klasse der Elemente zu bestehen, dessen sich eine Regel

zu bemächtigen vermag, die, auf die Elemente der ersten Klasse gestützt, von ihnen her die Existenz der zweiten sicherstellt. Die Regel enthält eine Anweisung darüber, wie in jedem Falle aus Elementen der ersten Klasse solche der zweiten zu gewinnen seien. Allerdings ist zu beachten, daß diese Anweisung nicht schon über die Art der Bezeichnung zu entscheiden vermag, sondern wesensmäßig gerade zu solchem gelangen lassen muß, das der Bezeichnung noch ermangelt.

Wenn also von der in Frage stehenden Menge ausweisbar werden soll, daß jedes endliche Bezeichnungssystem nur eine echte Teilmenge ihrer zu bezeichnen vermag, muß eine Regel als solche gegenständlich werden können, die von sich aus einen Weg angibt, wie von jeder dieser Teilmengen aus zu weiteren Elementen zu gelangen sei. Ein solches Element, zu dem sie zu führen vermöchte, kann dann deshalb selbst noch keine Bezeichnung innerhalb des vorliegenden Systems gefunden haben, weil es gerade erst aus der Menge sämtlicher im System nur immer bezeichenbarer Elemente herauswächst.

Die Regel weist aus dem Bereich dessen, das seine endliche Darstellung bereits hat finden können, in den Bereich dessen, für welches die Möglichkeit der eindeutigen Unterscheidung mittels Zeichen noch fehlt. Sie weist darauf hin — indem sie die Art der Bezeichnung in das Belieben dessen stellt, der nach der Regel verfährt. Die Elemente, die in die zweite Klasse gehören, sind also ihrem Aussehen nach unbestimmt, die Eindeutigkeit ihrer Unterscheidung ist abhängig vom Vollzuge der Bezeichnung. Diese Unbestimmtheit betrifft einzig die Art der Bezeichnung, nicht aber deren Möglichkeit als eine in Zukunft einmal sich realisierende, die vielmehr gerade durch das Bestehen der Regel schlechthin verbürgt ist. Die zweite Klasse der Einteilung vereinigt also genau die Elemente, auf welche die Regel von vornherein als solche bezogen ist, von denen jedes einmal mittels der Regel eine Bezeichnung, in der es von den anderen Elementen der Menge eindeutig unterscheidbar ist, wird erhalten können.

Ein Bezeichnungsverfahren, das eine unendliche Menge als durch ein unendliches Bezeichnungssystem konstituiert zu erweisen vermag, zeigt sich nicht als vollständig gebunden und in jeder Hinsicht eindeutig bestimmt, sondern stellt die innerhalb seiner successive erfolgende Neubezeichnung von Elementen wesensmäßig dem Verfahrenden selbst anheim. Es soll deshalb *genetisch gebundenes* Verfahren heißen.

Für das neue Bezeichnungsverfahren ist es im Unterschied vom dimensional gebundenen noch charakteristisch, daß es nicht die Basis für ein Neubezeichnungsverfahren mehr darstellen kann, sofern die Eindeutigkeit seines Bezeichnens an den jeweiligen Stand der Succession gebunden bleibt. Auch jede Neubezeichnung hätte sich der durch den Gang des Verfahrens bestimmten Genese der Bezeichnungen zu fügen.

Die Unterschiedenheit in der Charakteristik des Unendlichseins von Mengen, die durch ein endliches und ein unendliches Bezeichnungssystem bestimmt werden, findet ihren eigentlichen Ausdruck in der Möglichkeit einer Unterschiedenheit der Differenzierungsspielräume. Denn die Zweiklasseneinteilung der durch ein genetisch gebundenes Bezeichnungsverfahren bestimmten Menge macht ersichtlich, wie die erste Klasse wesensmäßig nicht dazu fähig ist, sämtliche Elemente der Menge zu umfassen. Diese Unfähigkeit kann aber zugleich darin gründen, daß der der Menge zugehörige Differenzierungsspielraum den Differenzierungsmöglichkeiten der sie bildenden Allgemeinbestimmung nicht Genüge tut — genau entsprechend wie die Zweiklasseneinteilung einer durch das Steigerungsverfahren bestimmten Menge auf die Unterschiedenheit des Differenzierungsspielraumes endlicher und unendlicher Mengen verweist.

Das klassische, aber wohl auch einzige Beispiel für eine durch genetische Gebundenheit ihrer Elemente ausgezeichnete Menge bietet die Cantor'sche zweite Zahlenklasse. Kein endliches Bezeichnungssystem vermag sie zu erschöpfen, keine eindeutige Bezeichnung ihrer sämtlichen Elemente zumal ist jemals möglich. Die zweite Zahlenklasse bleibt mit Bezug auf das Aussehen des größeren nichtabzählbaren Teiles ihrer Elemente wesensmäßig unbestimmt.

Die beiden möglichen Arten von Regeln, die für unendliche Mengen bindend sein können und ihnen je einen besonderen Unendlichkeitscharakter verleihen, sind somit zur Abhebung gelangt. Die durch die Regeln geleiteten Bezeichnungsverfahren bestimmen Klasseneinteilungen der Elemente der Mengen, durch welche diese notwendig auf Zeit bezogen werden, einmal im Hinblick auf den Vollzug ihrer Unterscheidung, sodann mit Rücksicht auf den Vollzug ihrer Bezeichnung. Hiermit scheint allerdings auch die Differenzierungskraft des Grundes mengenhafter Unendlichkeit erschöpft. Denn sofern das Unendlichsein von Mengen in der auf ihre mögliche Bezeichnung bezogenen Zeitbestimmtheit der Elemente gründet, diese aber nur durch Regeln verliehen und ausgewiesen werden zu können scheint, wird mit der Herausstellung der beiden denkbaren Arten von Regeln — eine Regel ist entweder auf ein endliches oder unendliches Bezeichnungssystem orientiert, tertium non datur — der Unterscheidungsgrund unendlicher Mengen bereits ausgeschöpft sein.

Dennoch erwächst aus dem Verhältnis, in dem die bestimmende Regel zur Menge als solcher stehen kann, noch eine weitere Möglichkeit des Unterschiedenseins. Für die regelgebundenen Elemente der entwickelten beiden Arten unendlicher Mengen ergibt sich nämlich eine Eigentümlichkeit, von der sich nicht einsichtig machen läßt, daß sie notwendig den Elementen beliebiger unendlicher Mengen zuzukommen habe. Die dimensional und genetisch gebundenen Bezeichnungsverfahren können aufgefaßt werden als Weisen eines Zugangs, vermittelst dessen jedes Element der Menge einmal zur Be-

stimmung gelangen muß. Es liegt mit den beiden Verfahren von vornherein ein (schon gebahnter oder noch ungebahnter) Weg vor, auf dem jedes Element der Menge nach endlich vielen Schritten in Blickweite kommen muß und zur eindeutigen Unterscheidung gelangen kann. Es sind aber Mengen immerhin denkbar, für deren Elemente wesensmäßig nicht sämtlich zumal ein Zugang gesichert werden kann, durch den jedes von ihnen in endlicher Succession einmal zur Bestimmung gelangen muß. Der Eigenart einer solchen Menge aber gilt es näherzukommen.

Die vierte Mengenkonstitutionsbedingung fordert für jedes Element einer Menge die Möglichkeit der Ausweisung seiner individuellen Eigenart, d. h. die Möglichkeit seiner eindeutigen Bezeichnung. In dieser Möglichkeit haben die Elemente beliebiger Mengen prinzipiell übereinzukommen. Es ist also auch für die Elemente unendlicher Mengen eine mögliche Weise des Zugangs gefordert. Darin liegt aber nicht, daß es zugleich gelingen müßte, die Zugänge zu sämtlichen Elementen der Menge in endlicher Succession zumal vorzulegen. Entsprechend soll die zu betrachtende Menge wesensmäßig immer noch solche Elemente enthalten, für die zwar eine Weise des Zugangs besteht, gleichwohl aber ‚noch' verborgen ist.

Wenn aber die Weise des Zugangs, der zur Bestimmung eines Mengenelements zu führen vermöchte, nicht vorliegt, so besteht zum Ziele der Vergegenständlichung des Elementes die Notwendigkeit seiner Entdeckung. Jeder Entdeckung aber liegt eine Entscheidung voraus, die in die Hand dessen gegeben ist, der die Entdeckung betreibt. Elemente unendlicher Mengen, für die eine Regel zu ihrer Bestimmung noch nicht gefunden werden konnte, die also der Weise des Zugangs nach noch verborgen sind, stehen in der Möglichkeit der Entdeckung und hängen, in dieser Möglichkeit stehend, von Entscheidungen ab, die jeweils für und gegen zugleich fallen.

Eine unendliche Menge, die mit regelgebundenen Elementen wesensmäßig auch solche enthält, auf deren Bezeichnung noch keine Regel bezogen ist, die also ihrer Entdeckung noch harren, erlaubt eine Zweiklasseneinteilung derart, daß in die erste Klasse die regelgebundenen Elemente fallen, die also eine Bezeichnung erhalten haben oder einmal erhalten werden, in die zweite Klasse dagegen solche, die nur in der ‚Möglichkeit' der Bezeichnung stehen. Ist die Einteilung eine wesensmäßige, so kann zwar die zweite Klasse, den Entdeckungen einer Wissenschaft folgend, immer neu Elemente an die erste Klasse verlieren, ohne jedoch jemals leer zu werden. Mit jeder neu vollzogenen Entdeckung, durch die Elemente der zweiten Klasse der ersten zugeführt werden, ist auch immer schon die Entscheidung gegen andere Elemente gefallen, deren Entdeckung im Sinne der Angabe einer Regel, die zu ihrer Bezeichnung und damit möglichen Unterscheidung führt, noch aussteht. Der Unendlichkeitscharakter einer solchen Menge ist von dem der früher bestimmten

Mengen unterschieden, sofern in diesen die zweite Klasse von Elementen, die sie enthält, wesensmäßig nicht vertreten war. So besteht auch die Möglichkeit, daß der Differenzierungsspielraum der neuen Menge den der vorher charakterisierten überragt. Denn die Zweiklasseneinteilung macht ersichtlich, wie die erste Klasse von sich aus nicht dazu fähig ist, sämtliche Elemente der Menge zu umfassen, obwohl sie auch durch genetisch gebundene Verfahren bestimmte Mengen enthält. Diese wesensmäßige Unfähigkeit kann aber darin gründen, daß der der ersten Klasse zugehörige Differenzierungsspielraum den Differenzierungsmöglichkeiten der die Menge bildenden Allgemeinbestimmung nicht gewachsen ist — entsprechend, wie die Zweiklasseneinteilung einer durch ein Steigerungsverfahren bestimmten Menge auf die Unterschiedenheit des Differenzierungsspielraums endlicher und unendlicher Mengen verwies.

Allerdings vermag eine so geartete Menge in ihrem spezifischen Unendlichsein garnicht ausdrücklich Gegenstand zu werden. Denn dazu bedürfte es einer Regel, die zwischen erster und zweiter Klasse vermittelte, das hieße aber eines im vorhinein vorliegenden Zugangs zu den Elementen der zweiten Klasse, der ihnen gerade nicht zukommen kann. Die Anweisung für die Existenz der Menge wird daher nur darin liegen, daß jeder Versuch mißlingt, den Zugang zu ihren Elementen durch ein genetisch gebundenes Verfahren in die Gewalt zu bekommen. Das klassische, aber auch einzigartige Beispiel für eine solche Menge stellt das Kontinuum dar. Jedoch glauben sehr viele Mathematiker, da es nicht gelingt und auch nicht nach dem Vorangehenden gelingen kann, die besondere Eigenart dieser Menge auszuweisen, ihre faktische Wohlordnung wäre vollziehbar. Das würde bedeuten, die Bestimmung des Kontinuums durch ein genetisch gebundenes Bezeichnungsverfahren wäre prinzipiell zu erreichen. Dieses Problem wird aber wohl ein unentschiedenes bleiben müssen.

Die somit zur Aufweisung gebrachte Möglichkeit dreifach unterschiedener Differenzierungsspielräume unendlicher Mengen offenbarte sich mit der Möglichkeit dreifach unterschiedener, aufeinander aufbauender Zweiklasseneinteilungen der Elemente, denen eine dreifach unterschiedene verschiedenzeitliche und eine dreifach unterschiedene gleichzeitliche Orientierung der Elemente entsprechen. Die erste Zweiklasseneinteilung erfolgte im Hinblick auf die successive Unterscheidung der Elemente, die zweite im Hinblick auf die successive Bezeichnung der Elemente, die dritte im Hinblick auf die successive Entdeckung der Elemente. Unterscheidung setzt Bezeichnung und Entdeckung voraus. Entdeckung geht der Unterscheidung und Bezeichnung voran. Für die erste Einteilung war die gleichzeitliche Orientierung einer endlichen Menge von Elementen mit Bezug auf ihre Unterscheidung maßgebend, für die zweite und dritte Einteilung

wurde die gleichzeitliche Orientierung einer unendlichen Menge von Elementen mit Bezug auf ihre Bezeichnung wesentlich, und zwar als solche, in deren Besitz sie sind und kommen werden. Die verschiedenzeitliche Orientierung erfolgte für alle drei Einteilungen nach Vergangenheit und Zukunft, nämlich im Hinblick auf Unterscheidung, Bezeichnung, Entdeckung der Elemente. Zugleich aber erhielt die zweite Klasse der ersten Einteilung einen besonderen Bezug auf Vergangenheit, die zweite Klasse der zweiten Einteilung einen besonderen Bezug auf Zukunft und die zweite Klasse der dritten Einteilung einen besonderen Bezug auf Möglichkeit, indem erst diese dreifach unterschiedene Zeitbestimmtheit der Elemente der zweiten Klasse jener Einteilungen die dreifach gestufte Unterschiedenheit der unendlichen Mengen selbst ermöglichte.

Als allgemeines Ergebnis läßt sich formulieren: Zum Sein von Mengen überhaupt gehört die Zeichenbezogenheit ihrer Elemente, zum Sein unendlicher Mengen die Zeitbestimmtheit dieses Zeichenbezuges.

II. Teil: Menge und Zeitlichkeit.

Einleitung:

Möglichkeit und Ziel einer Neuorientierung der Untersuchungen.

Das Ergebnis des vorangehenden Teiles, der allgemein mit dem Sein der unendlichen Mengen die Möglichkeit ihrer Vergegenständlichung zum Thema machte, läßt, der Folge der Abschnitte entsprechend, eine Vierteilung zu. Im ersten Abschnitt waren kategoriale Grundbestimmungen, die im Mengenbegriff vereinigt sind, herausgestellt und deren Einheit in Beziehung zu so etwas wie Raum mittels des Begriffes des Differenzierungsspielraumes gebracht worden. Der zweite Abschnitt hatte den Zeichenbezug der Mengen in Abhängigkeit von einer zeitlichen Orientierung dieser entwickelt und dadurch die Wesensunterscheidung der endlichen und der unendlichen Mengen nach der Art ihrer zeitlichen Bestimmtheit vorbereitet. Der dritte Abschnitt suchte mit dem Zeichen-Steigerungsverfahren jene einheitliche Form festzulegen, in welcher der Zeichen- und Zeitbezug der unendlichen Mengen vor jeder und für jede Vergegenständlichung notwendig sich darzustellen habe. Der vierte Abschnitt endlich fand in der auf Zeichen bezogenen Zeitbestimmtheit der unendlichen Mengen einen Grund der Möglichkeit einer dreifachen Differenzierung mengenhafter Unendlichkeit.

Drei Thesen lassen sich herauslösen: 1. Mit der Seinskonstitution der unendlichen Mengen ist so etwas wie Raum und Zeit verwachsen. 2. Nur aus dieser Abhängigkeit kann ontologisch das begründet werden, was der Mathematiker unter Verschiedenmächtigkeit versteht. 3. Für die Seinsart der unendlichen Mengen ist deren Repräsentation durch Zeichen bestimmend. — So einfach dieses Ergebnis seiner allgemeinen Formulierung nach zu sein scheint, so problematisch und gar fragwürdig stellt es sich dar, sobald es speziellen Folgerungen zugrundegelegt werden soll. Vor allem sind es zwei prinzipielle Schwierigkeiten, die weder zu vermeiden noch zu überwinden sind, vielmehr die noch bestehende Klärungsbedürftigkeit des Herausgestellten in ein neues Licht rücken. Zunächst ist die These

von der Raum - Zeitbestimmtheit der unendlichen Mengen aufs äußerste befremdlich, wenn man bedenkt, daß weder unendliche Mengen noch deren Elemente als solche in Raum und Zeit vorkommen, ihrem Wesen nach so wenig etwas mit dem, was man für gewöhnlich unter Raum und Zeit versteht, zu tun haben, daß man sie gleich dem Mathematischen überhaupt als das Außerzeitliche schlechthin zu bezeichnen pflegt. Soll also die These auch nur als Hypothese gehalten werden können, so wäre erst einmal dem nachzugehen, was für ein Raum und was für eine Zeit denn für die Seinskonstitution der unendlichen Mengen überhaupt in Frage käme, wenn die vulgäre Bedeutung von Raum und Zeit von vornherein ausgeschaltet werden muß. Aber auch abgesehen von der Möglichkeit einer solchen Klärung ist es des weiteren unbestimmt, wie so etwas wie Raum und Zeit das Sein eines Gegenstandes zu konstituieren vermag. Faßt man das Sein im Sinne einer Einheit kategorialer Bestimmungen, so konstituiert es gerade das Seiende, scheint aber selbst nicht wieder durch anderes konstituiert werden zu können.

Das Vorliegen von zwei prinzipiellen Schwierigkeiten, die das erreichte Ergebnis schlechthin in Frage ziehen, erfordert daher die wiederholende Weiterführung der Untersuchung, die sich zwar des Vorangegangenen als einer sachlichen Vorgabe bedienen kann, die Rechtmäßigkeit der Vorgabe aber gerade erst zu erweisen hätte. Die Aufgabe der neu aufzunehmenden Analyse wäre also wiederum auf das Sein der unendlichen Mengen gerichtet, muß daher das Problem ihrer Seinsart zunächst außer acht lassen. Diese Nichtberücksichtigung hat ihren sachlichen Grund darin, daß die Frage nach dem Sein eines Gegenstandes der nach seiner Seinsart vorgeordnet ist, indem letztere mit Sinn zu stellen eine gewisse vorläufige Beherrschung der Seinsstrukturen voraussetzt.

So klar aber auch die Aufgabe einer Fortführung der Untersuchung über das Sein der unendlichen Mengen in ihrer Notwendigkeit vor Augen stehen mag, so wenig besteht zunächst weder eine spezielle Anweisung über die Fragerichtung, noch über den Fragehorizont, in dem sich haltend allein der Versuch einer Lösung in Angriff genommen werden kann. Es ist aber das Seinsproblem der unendlichen Mengen ein ontologisches Problem und nimmt seinen Platz ein innerhalb der regionalontologischen Problematik der Mathematik. Fragerichtung und Fragehorizont kann sich daher auch im speziellen Sinn nur daraus bestimmen, was überhaupt ontologischer Forschung zu fragen aufgegeben ist. Um daher den Standort, an den die weitere Untersuchung im Ansatz gestellt ist, zu ermessen und von ihm aus eine Anweisung über die allgemein notwendige Art des Vorgehens zu erhalten, wird es notwendig, die zur Behandlung stehende spezielle Aufgabe in Zusammenhang zu bringen mit dem, was allgemein von ontologischer Erkenntnis aus einer Idee der Ontologie überhaupt heraus gefordert werden muß.

Für jede ontologische Erkenntnis ist leitend die Frage nach dem Sein. Um sie aber angemessen vollziehen zu können, müssen Richtlinien bestehen, welche den Gang des Fragens von einem Ausgang aus bis zu einem Zielpunkte hin festlegen. Über solche Richtlinien aber kann nicht von vornherein verfügt werden, sie sind vielmehr nur innerhalb einer systematischen Ausarbeitung ontologischer Fragestellung zu gewinnen und zu entwickeln. Es wird daher Bezug genommen auf die Idee einer Fundamentalontologie, wie sie durch M. Heidegger zur Umgrenzung und Ausarbeitung gelangte. Denn wenn überhaupt, so muß sich aus dieser Idee ein Regulativ für regionalontologische Erkenntnis herauslösen lassen.

Eine Übersicht über den Frageweg, der von der allgemeinen Frage τί τὸ ὄν; zur eigentlich fundamentalontologischen Fragestellung vordringt, soll die notwendige Orientierung verleihen [1]). Vier Stadien des Weges lassen sich unterscheiden, die ebensoviele Stufen der Ursprünglichkeit metaphysischen Fragens zum Ausdruck bringen:

1. In der durch die Griechen angesetzten Leitfrage der Metaphysik τί τὸ ὄν; „was das Seiende als ein solches sei, ist nach dem gefragt, was überhaupt das Seiende zum Seienden bestimmt. Wir nennen es das Sein des Seienden und die Frage nach ihm die Seinsfrage“ [2]).

2. „Um aber die wesenhafte Bestimmtheit des Seienden durch das Sein begreifen zu können, muß das Bestimmende selbst hinreichend faßbar, das Sein als solches, nicht erst das Seiende als solches, muß zuvor begriffen werden. So liegt in der Frage τί τὸ ὄν; (was ist das Seiende?) die ursprünglichere: was bedeutet das in jener Frage schon vorverstandene Sein?“ [2]).

3. „. . . . muß die Frage der ‚ersten Philosophie‘, was das Seiende als solches sei, über die Frage, was das Sein als solches sei, zurückgetrieben werden zu der noch ursprünglicheren: von wo aus ist dergleichen wie Sein, und zwar mit dem ganzen Reichtum der in ihm beschlossenen Gliederungen und Bezüge, überhaupt zu begreifen?“ [3])

4. „Die Seinsfrage als Frage nach der Möglichkeit des Begriffes vom Sein entspringt ihrerseits aus dem vorbegrifflichen Seinsverständnis. So wird die Frage nach der Möglichkeit des Seinsbegriffes noch einmal um eine Stufe zurückgetrieben zur Frage nach dem Wesen des Verstehens von Sein überhaupt. Die ursprünglicher ergriffene Aufgabe der Grundlegung der Metaphysik verwandelt sich demnach in die Aufhellung der inneren Möglichkeit des Seinsverständnisses“ [4]).

---

[1]) M. Heidegger, Kant und das Problem der Metaphysik, 1929. § 40/41.
[2]) a. a. O. Seite 213.
[3]) a. a. O. S. 215.
[4]) a. a. O. S. 216.

Von diesem zuletzt erreichten Stadium metaphysischen Fragens aus aber führt der Weg unmittelbar zur Umgrenzung der Fundamentalontologie als existenzialer Analytik des Daseins. Denn das Seinsverständnis gibt sich als der Grund der Möglichkeit der Existenz, der Seinsart des Menschen." . . . geschähe das Verstehen von Sein nicht, der Mensch vermöchte als das Seiende, das er ist, nie zu sein . . ." [5]) So „findet das Problem der Grundlegung der Metaphysik seine Wurzel in der Frage nach dem Dasein im Menschen, d. h. nach dessen innerstem Grunde, nach dem Seinsverständnis als der wesenhaft existenten Endlichkeit. Und diese Frage nach dem Dasein fragt, welchen Wesens das so bestimmte Seiende sei" [6]). Gründet daher das Seinsverständnis seiner Möglichkeit nach in der Seinsverfassung des Daseins, so hat „die von der Grundlegungsfrage geführte Metaphysik des Daseins dessen Seinsverfassung in der Weise zu enthüllen, daß diese als die innere Ermöglichung des Seinsverständnisses sichtbar wird" [7]). „Die Enthüllung der Seinsverfassung des Daseins ist Ontologie. Sofern in ihr der Grund der Möglichkeit der Metaphysik . . . gelegt werden soll, heißt sie Fundamentalontologie" [7]).

Der stufenweise durchentwickelten Idee einer Fundamentalontologie muß aber die für den Problemhorizont der folgenden Untersuchungen speziell in Betracht kommende Idee einer Regionalontologie in geeigneter Weise angemessen werden. Steht für diese nicht das Sein im allgemeinen zum Problem, sondern beschränkt sich die Seinsfrage auf eine Region von Gegenständen, wie sie einer jeden Spezialwissenschaft je verschieden vorgegeben ist, so muß mit dem jeweils speziellen Seinsbegriff auch ein spezielles Seinsverständnis thematisch werden, das aus dem zunächst und zumeist vorliegenden genetisch zu entwickeln wäre. In Übereinstimmung mit der Entwicklung der Idee einer Ontologie überhaupt führt daher das Problem einer Ontologie der Spezialwissenschaften bezw. der von ihnen behandelten Gegenstände von der Frage nach dem Sein dieser Gegenstände über die nach dem Begriff und seiner Möglichkeit, d. h. nach dem Horizont von Sein, zur Grundfrage nach der Ermöglichung des Seinsverständnisses, also nach der Seinsverfassung des Daseins.

Doch ebenso wie jetzt nicht mehr das Sein „mit dem ganzen Reichtum der in ihm beschlossenen Gliederungen und Bezüge" problematisch wird, kann auch das Dasein nicht mehr in der vollen Struktur seiner Seinsverfassung für die Ermöglichung des regionalen Seinsverständnisses in Ansatz gebracht werden. Es wird vielmehr notwendig sein, gerade um dieses Seinsverständnis in seiner

---

[5]) a. a. O. S. 218.
[6]) a. a. O. S. 220.
[7]) a. a. O. S. 222.

speziellen Eigenart aufzuhellen, die Idee eines Ausschnitt- oder „Rumpf-Daseins" zu bilden, dessen Seinsverfassung gerade die Strukturen enthält, die geeignet sind, das regionale Seinsverständnis zu ermöglichen.

Es besteht also auch für eine Regionalontologie die Aufgabe einer Analytik des Daseins, jedoch eines Rumpfdaseins, das mit Rücksicht auf seine regionale Erkenntnisbezogenheit eine ontologisch-ontische Isolierung erfahren hat. Im Falle einer Ontologie der Mathematik würde es sich letztlich darum handeln, die existenziale Analytik des mathematisierenden Daseins zu entwickeln [8]).

So weit aber auch der Fragehorizont sein mag, welcher der an der Idee einer Fundamentalontologie ausgerichteten Regionalontologie zuwächst, so kann gleichwohl ein Hinweis nicht unbeachtet bleiben, der innerhalb der fundamentalontologisch orientierten Interpretation der Kritik der reinen Vernunft eine neue Dimension möglichen Fragens eröffnet. „Folgt der transzendentalen Analytik im weiteren Sinne nicht eine ‚transzendentale Dialektik'? Wenn diese zunächst auch nur die kritische Anwendung der gewonnenen Einsicht in das Wesen der metaphysica generalis auf die Zurückweisung der überlieferten metaphysica specialis sein mag, liegt in dieser scheinbar nur negativen Charakteristik der transzendentalen Dialektik nicht doch eine positive Problematik? . . . Kant sagt, der ‚transzendentale Schein', dem die überlieferte Metaphysik ihre Möglichkeit verdanke, sei ein notwendiger. Muß diese transzendentale Unwahrheit nicht hinsichtlich ihrer ursprünglichen Einheit mit der transzendentalen Wahrheit aus dem innersten Wesen der Endlichkeit im Dasein positiv begründet werden? Gehört zu diesem Wesen der Endlichkeit das Unwesen jenes Scheins?" [9])

Wendet man die Überlegung auf regionalontologische Erkenntnis an, so wäre als weitere Aufgabe in Erwägung zu ziehen, mit der Enthüllung des Seins eines Seienden nicht nur die ontologische Wahrheit als den Ursprung der ontischen Wahrheit zur Entwicklung zu bringen, sondern durch Einbeziehung des transzendentalen Scheins in die Problematik auch die ontische Unwahrheit ihrer Möglichkeit nach zu begründen. Es würde also der Seinsanalyse, die mit der Thematisierung des Seins des Daseins ihren Ursprung erreicht, eine Untersuchung darüber zu folgen haben, ob und in welchem Ausmaße

---

[8]) Die Problematik, die mit der Frage aufkommt, worin es gründet, daß sich das Dasein, sofern es Wissenschaft treibt, in ein solches Rumpfdasein hineinverlegt, je für die verschiedenen Wissenschaften in ein prinzipiell verschiedenes, muß ganz unberührt bleiben. Eine allgemein charakterisierende Anzeige für diesen „Ursprung der Wissenschaft" gibt M. Heidegger, Sein und Zeit, S. 363. Ein Versuch, die Genese des mathematisierenden Daseins zu deuten, findet sich bei O. Becker, Mathematische Existenz, Jahrb. f. Philos. u. phänomenol. Forschg., 1927, Bd. 8, zusammenfassend S. 759 ff.

[9]) a. a. O., S. 235

die herausgestellten Seinsstrukturen einem Schein verhaftet sind, der nicht nur ihre Enthüllung zu verhindern, sondern gar eine Verkehrung zu erzeugen vermag. Gelänge es aber, einen transzendentalen Schein aus der Seinsverfassung des Daseins selbst heraus in seiner Notwendigkeit zu begründen, so wäre ein Kriterium gewonnen, welches das Problemfeld einer positiven Wissenschaft in seinem ganzen Ausmaße abzustecken erlaubte und vor allem ein Urteil darüber zuließe, ob und in welchem Umfange der faktische Stand der Wissenschaft dem transzendentalen Schein verfiel und welchen Einfluß dieses „Verfallen" auf die Gesamtorientierung der Wissenschaft nehmen mußte.

Durch die kurz nachbeschriebene Umgrenzung des Aufgaberahmens ontologischer Erkenntnis ist für die spezielle Aufgabe dieser Untersuchung eine Position erreicht, die über geeignete Richtlinien wohl über das noch hinaus verfügen läßt, was fürs erste erzielt werden kann. Der Untersuchungswes einer thematischen Behandlung des Seins der unendlichen Mengen hat, ausgehend von der begrifflichen Fassung des Seins, zu dem vorzudringen zu suchen, von wo aus überhaupt dergleichen wie Mengesein zu begreifen ist, um das Ziel in der Herausstellung der Seinsverfassung des Daseins zu sehen, die den Grund für die Möglichkeit des speziellen Seinsverstehens abgibt. Abschließend wäre dann noch zu untersuchen, in welchem Sinne der Analytik eine Dialektik folgen könne und müsse.

Drei Problemgruppen würden also bei Innehaltung des vorausgeschickten allgemeinen Untersuchungsplanes nacheinander zur Behandlung gelangen:

1. Die Frage nach der „Möglichkeit des Begriffes vom Sein" der unendlichen Mengen.
2. Die Frage nach der Seinsverfassung eines unendliche Mengen in ihrem Sein verstehenden Daseins.
3. Die Frage nach einem der ontologischen Wahrheit entgegenstehenden transzendentalen Schein.

So sehr aber auch die Innehaltung dieses Planes aus dem Wesen ontologischer Erkenntnis selbst heraus gefordert werden muß, um dem speziellen Problem bis zu seinem letzten Ursprung nachgehen und es dadurch erst völlig zur Entfaltung bringen zu können, so wäre bei aller regionalen Beschränkung doch eine Mannigfaltigkeit der Einzeluntersuchungen gefordert, die über den vorgesetzten äußeren Rahmen weit hinausreichte. Es wird daher im wesentlichen nur die erste Fragegruppe einer ausführlichen Erörterung unterzogen, die zweite gänzlich unberücksichtigt gelassen und die dritte allein auf ein spezielles Problem der ontischen Wissenschaft hin orientiert werden, ihrem eigentlichen Horizont nach jedoch nur angedeutet bleiben. — Der auf die erste Fragegruppe gerichtete Hauptteil der Untersuchung erfährt aber eine Zweiteilung. Denn die Ausgrenzung

des Wesens eines jeden Gegenstandes bedarf eines Wogegen, im Hinblick auf welches nur die Seinsstrukturen zur Abhebung gelangen. Das nächste Wogegen der Unendlichkeit aber ist die Endlichkeit. Ihrer, d. h. des Seins der endlichen Mengen, muß sich daher die Analyse zunächst zu versichern suchen, um eine Bedingung zu erfüllen, mittels deren erst den Strukturen der Unendlichkeit die notwendige Schärfe und Durchsichtigkeit zu verschaffen ist.

Was noch die anhangweise behandelte dritte Fragegruppe angeht, so mußte darauf Bedacht genommen werden, überhaupt nur einmal die Möglichkeit und Existenz dialektischer Problematik innerhalb einer Ontologie der Mathematik darzutun. Denn von vornherein ist es garnicht selbstverständlich, daß auch die Mathematik, die „strengste" aller Wissenschaften, Anlaß zu dialektischer Fragestellung geben könnte; ja so wenig selbstverständlich, daß von Kant selbst auch nur die Möglichkeit von vornherein in Abrede gestellt wurde. „Es bedarf keiner Kritik der Vernunft im empirischen Gebrauche, weil ihre Grundsätze am Probierstein der Erfahrung einer kontinuierlichen Prüfung unterworfen werden; imgleichen auch nicht in der Mathematik, wo ihre Begriffe an der reinen Anschauung sofort in concreto dargestellt werden müssen, und jedes Ungegründete und Willkürliche dadurch alsbald offenbar wird" [10]). Es sind aber hundert Jahre nach Kant einer neuentdeckten und aufgebauten Disziplin der Mathematik Schwierigkeiten erwachsen, die das Ansehen echter Antinomien haben und die Vermutung wachrufen, daß ihnen kein ontischer, sondern ein transzendentaler Schein zum Grunde liegt. Kann daher die Natur dieses Scheins, bezw. des Irrtums, zu dem er verleitet, als ontologisch enthüllt werden und legt sich zudem die Notwendigkeit des Scheins in einem ähnlichen Sinne nahe, wie er von Kant für die dialektischen Schlüsse der reinen Vernunft in Anspruch genommen wurde, so kann zum wenigsten für die Mengenlehre die Berechtigung des Unternehmens einer Dialektik im Kantischen Sinne als erwiesen gelten.

Daß der Nachweis einer solchen Berechtigung am Ende der Untersuchung „anhangsweise" erfolgt, soll darauf hindeuten, daß er zwar in eine Dialektik hineinzuführen sucht, ohne doch schon über die Mittel zu einer angemessenen Ausgestaltung zu verfügen. Diese werden vielmehr erst durch eine Vervollständigung der begonnenen Analytik unter Aufnahme der an zweiter Stelle genannten Problemgruppe zu erlangen sein.

§ 1.
Der Begriff einer Menge.

Eine Menge ist allgemein ein Gegenstand in dem formal-ontologischen Sinne eines Bestimmungsträ-

[10]) Kritik d. reinen Vernunft B, 738/39.

gers, dem logischen eines Satzsubjektes entsprechend [1]). Eine erste Charakteristik ergibt sich, wenn man die Menge als einen zusammengesetzten Gegenstand bezeichnet. Zusammengesetzt meint nichts anderes als aus Teilgegenständen bestehend, derart, daß das Zusammengesetzte in gewissem Sinne ein Ganzes vorstellt. Nicht jeder zusammengesetzte Gegenstand ist aber schon eine Menge. Niemandem wird es z. B. einfallen, einen Körper, etwa ein Mineral, mit einer Menge zu identifizieren. Man muß erst von wesentlichen Bestimmungen seiner absehen, um ihn als Menge (von Molekülen) in den Blick zu bekommen. Ein Körper ist keine Menge, wohl aber, ebenso wie eine Menge, ein Zusammengesetztes oder Ganzes.

Zwischen den Teilen eines Ganzen besteht eine Beziehung allein deshalb, weil sie Teile eines Ganzen sind. Ist diese Beziehung schlechthin verschiedenartig, so wird es sich auch um artmäßig unterschiedene Ganze handeln. Mosaiksteine z. B. können zu einem Bilde zusammengesetzt werden, das alles andere als eine „bloße" Menge darstellt. Liegen sie wild durcheinander, so bilden sie einen Haufen, der schon eher dem nahe kommt, was eine Menge ist. Die Beziehung der Teile aufeinander offenbart sich hier als eine Zusammengehörigkeit oder Zugehörigkeit der Teile zueinander, die beim Mosaikbild am engsten, beim Haufen weniger eng zu sein, bei der Menge aber überhaupt nicht vorzuliegen scheint. — Es fragt sich aber, was man unter Zusammengehörigkeit versteht, wenn man sie den Teilen einer Menge, im Unterschied zu den Teilen eines anderen Ganzen, aberkennen will, und ob nicht gegebenenfalls eine passende Erweiterung dieses Terminus auf die Teile einer Menge am Platze sei. — Gegenstände sollen notwendig zusammengehörig heißen, wenn sie in dem, was sie von sich aus sind, aufeinander verweisen, dagegen zufällig zusammengehörig, wenn ihre Verweisung aufeinander nicht ihnen selbst entstammenden Gesichtspunkten zu entnehmen ist.

Von hier aus ergibt sich, daß auch die Teile einer Menge als zusammengehörig zu betrachten sind, sofern ein Teil immer schon als solcher auf weitere Teile verweist. Und zwar können sie ebensogut notwendig wie zufällig zu einander gehören, eine Menge ist als solche prinzipiell gegen die besondere Art der Zusammengehörigkeit ihrer Teile indifferent. Dagegen sind sowohl das Mosaikbild wie der Haufen von Mosaiksteinen von der Art eines Ganzen, dessen Teile prinzipiell notwendig zu einander gehören.

Mit dieser Charakteristik einer Menge als eines indifferent zusammengesetzten Gegenstandes ist jedoch vorerst nur negativ

---

[1]) Gegenstand wird hier und im Folgenden, der Aufgabe der Untersuchung gemäß, speziell als Erkenntnisgegenstand genommen. Andernfalls wäre seine primäre Kennzeichnung als Bestimmungsträger nicht zutreffend.

dasjenige bestimmt, wovon bei jeder Mengenvergegenständlichung abgesehen werden muß. Es ist aber klar, daß das Mosaikbild nicht schon dadurch zur Menge (von Steinen) wird, daß man von der besonderen Art des Zusammengehörens der Teile, also der Bildhaftigkeit des Ganzen, abstrahiert. Man vermöchte dies sogar garnicht ohne weiteres, sofern bei einem Bilde die Teile zunächst und zumeist nicht ausdrücklich im Blick stehen, es also, um von der notwendigen Zusammengehörigkeit der Teile abzusehen, überhaupt erst einmal der Hinwendung, des Hinsehens auf die Teile bedürfte. Für die Ganzheit von der Art eines Bildes oder auch eines Körpers ist es gerade charakteristisch, daß die Teile nicht als solche aus der Ganzheit heraustreten, vielmehr in ihr aufgehen, zunächst ungegenständlich bleiben. Demgegenüber ist eine Menge ein solches Ganzes, dessen Teile nicht nur zufällig und beliebig, sondern notwendig und sämtlich aus ihr hervortreten; eine Menge isoliert schon immer ihre Teile.

Die Zugehörigkeit der Teile eines Ganzen zueinander schließt aber in sich die Nichtzugehörigkeit zu anderem und des anderen zu ihnen. Eine Menge steht daher ihrem Wesen nach schon immer im Gegensatz zu solchem, was nicht zu ihr gehört. Gleichwohl wird terminologisch unter Erweiterung des Begriffs auch von der „Menge“ alles Seienden gesprochen, auch dieses als zueinander gehörig gesetzt. In diesem Sinne könnte man etwa für den Kantischen Weltbegriff (Inbegriff aller Erscheinungen) in Anspruch nehmen, zwar nicht eine Menge zu sein, aber doch den Begriff einer solchen mit Bezug auf seine sämtlichen Teile zu enthalten. Diese würden dann zusammengehören, ohne daß es solches „gäbe“, auf das die Menge als nicht dazu gehörig noch bezogen sein könnte. Es empfiehlt sich, um nicht den genannten wichtigen Wesensunterschied zu verdecken — wie sich später erweisen wird, noch aus ganz anderen Gründen — in diesem Falle weder von Zusammengehörigkeit der Teile noch von Mengen zu sprechen. Das Gleiche gilt für die mathematisch paradoxe „Menge“ aller Mengen, und zwar in noch höherem Maße, da sie nicht nur das Erscheinende, sondern alles „irgendwie“ Seiende enthält.

Der Wesenscharakter einer Menge, immer schon zu Nichtzuihrgehörigem im Gegensatz zu stehen, soll ihre Abgeschlossenheit heißen. Jeder Abschluß ist Abschluß gegen . . . Die „Menge“ aller Mengen, aber auch der Inbegriff aller Erscheinungen, wiewohl nicht eine beliebige unendliche Menge, sind schlechthin unabgeschlossen.

Eine Menge also wird thematisch als ein indifferent-isolierend-abgeschlossen zusammengesetzter Gegenstand.

§ 2.
Die Räumlichkeit einer Menge.

Die Elemente einer Menge stehen als Teile eines Ganzen in einer Verweisung aufeinander, die als abschließend isolierende Zusammengehörigkeit charakterisiert wurde. Wenn es aber für das, was in einer Menge zusammengehören kann, keinerlei regionale Schranken gibt, so wird sich der Sinn dieser Zusammengehörigkeit auch nicht mehr aus irgendeiner Sachhaltigkeit heraus bestimmen. Es muß sich vielmehr um deren allgemeinste und formalste Bedeutung handeln, die jeder real fundierten bereits zum Grunde liegt.

Überblickt man die verschiedenartigen Bedeutungen, in denen der Ausdruck „Zusammengehörigkeit" zur Verwendung gelangt, so findet man nur eine einzige, deren relative Regionalitätsunabhängigkeit einen Hinweis auf die Art der Zusammengehörigkeit der Teile einer Menge gestattet. Wir sind etwa gewohnt, mit jedem Gegenstande eine Bezeichnung zu verknüpfen, ohne gerade diese Bezeichnung als durch das Wesen des Gegenstandes gefordert anzusehen. Oder wir haben unter gewissen gleichgültigen äußeren Umständen einmal ein aufregendes Erlebnis gehabt, das seitdem mit dieser zufälligen Situation verbunden erscheint. Man spricht in solchen und ähnlichen Fällen von Association und versteht darunter die zwangsläufige Verbindung verschiedenartiger Gegenstände durch ihre Zugehörigkeit zu einem Bewußtsein, die nach Gesetzen erfolgt, die keinerlei regionalen Bindungen unterliegen. Die Glieder der Association sind als das gleichmäßig Associierte Teile eines Ganzen.

Es bedarf aber der für die Association konstitutive Sinn von Zusammengehörigkeit als der psychologisch zwangsläufigen Gemeinsamkeit eines Ins-Bewußtsein-Tretens oder darin Stehens einer formalisierenden Modifikation, soll er auch auf Mengen seine Anwendung finden können. Vor allem haben die Teile einer Menge in ihrer Zusammengehörigkeit nichts mit psychologischer Zwangsläufigkeit zu tun; andererseits ist der Terminus „Bewußtsein" in anbetracht der zu behandelnden Gegenstandssphäre wohl zu weit. Faßt man daher Zusammengehörigkeit als die bloße Gemeinsamkeit des in das Blickfeld eines erkennenden Verhaltens Tretens oder sich darin Befindens, so steht der Anwendung auch auf Mengen nichts mehr im Wege. In der Tat, die Zusammengehörigkeit der zu einer Menge zusammengeschlossenen gänzlich heterogenen Gegenstände (Zeit, Tugend, Auto) kann eben nur darin liegen, daß sie, auf welchem Wege immer, gemeinsam in ein Gesichtsfeld treten. — Für solches Verschiedene, das durch einen Blick umfaßt wird, sagt man auch, es stehe „zumal" im Blick, sei zumal einem erkennenden Verhalten „gegeben". Es soll deshalb die das Wesen einer Menge bestimmende Form der Zusammengehörigkeit Zumalgegeben-

heit heißen. Sie ist als regional unbeschränkt die formalste, als jede andere Art fundierend zugleich die allgemeinste Weise der Zusammengehörigkeit. Denn nichts kann sachhaltig als zusammengehörig verstanden werden, dessen Teile nicht schon zumal im Blick stehen.

Man könnte den Einwand machen, daß durch das gemeinsame Zukommen einer ganzheitsbildenden Eigenschaft oder Allgemeinbestimmung schon dasjenige hinreichend umgrenzt sei, was die Teile einer Menge zusammenhalte. Nun kann es zwar keinem Zweifel unterliegen, daß es zur Vergegenständlichung einer Menge des Hinsehens auf eine solche Eigenschaft bedarf. Aber diese, obwohl den Teilen gemeinsam zukommend, vermag sie doch noch nicht zusammenzuzwingen, derart, daß sie sich auch als zusammengehörig dem erkennenden Zugriff darbieten. Die fragliche Allgemeinbestimmung hat vielmehr nur die Funktion des Leitfadens, nach welchem die Teile der Menge zusammen in das Blickfeld geholt werden.

Es gilt aber einige Mißverständnisse abzuwenden, die sich mit Bezug auf den für alles Folgende zentralen Sinn von Zumalgegebenheit einstellen mögen. Zunächst kann unter Gegebenheit keine spezielle Zugangsart verstanden sein, die für ein erkennendes Erfassen zum Seienden besteht. Es findet also nicht etwa eine Beschränkung auf die Art des Gegebenseins des Vorhandenen statt, als wenn das Zumalgegebene immer schon das Zumalvorhandene wäre. Vielmehr meint Gegebensein nichts anderes als das bloße im Blickfeld eines erkennenden Verhaltens Stehen, gleichgültig, welcher besondere Zugang für das Erkennen zum Gegenstande vorliegt. — Des weiteren aber ist das „Zumal" noch von jeder räumlichen wie zeitlichen Auslegung fernzuhalten, wenn Raum als Form des Gegebenseins des Vorhandenen, Zeit als Form des Gegebenseins des Innermenschlichen gefaßt wird. Die Gefahr der ersten Mißdeutung ist wohl gering. Denn daß etwa die Teile einer Zahlenmenge weder im Raume sind noch in ihn versetzt werden, erscheint als trivial. Dagegen könnte man schon eher das Zumal als Zugleich zu interpretieren versucht sein. Nun kommt es allerdings darauf an, was man unter dem Zugleich versteht. Nimmt man es jedoch in der vulgären Bedeutung des „im gleichen Jetzt, also gleichzeitig vorhanden", so kann der Sinn des Zumal offenbar nicht getroffen sein. Denn es bleibt nicht auf das Vorhandene beschränkt.

Werden die Teile einer Menge schon immer als isoliert verstanden, so kann auch der Sinn von Isoliertheit nur in formalisierender Anmessung an die vulgäre Bedeutung dieses Terminus begriffen werden. So nimmt etwa eine auf einer Gesellschaft sich isolierende Person eine gesonderte Stellung ein, die sie in ihrer Eigenart sich darstellen läßt und aus der gesellschaftlichen Verbundenheit heraushebt. Entsprechend ist ein isolierter Kranker dem üblichen

Konnex mit den Mitmenschen entzogen, während er in verstärktem Maße zur Geltung gelangt. Allgemein meint also Isolieren ein Heraustreten oder Herausstellen aus einer Verbundenheit, ohne daß aber diese gänzlich verlassen würde. Sowohl der Sonderling als auch der Kranke geben nicht einfach jeden Zusammenhang mit ihrer Umwelt auf, sie nehmen nur innerhalb ihrer eine neuartige Stellung ein. Jedes Isolieren ist gleichbedeutend mit einem Stellungswechsel innerhalb eines Zusammenhangs; für das Isolierte muß also immer schon die Möglichkeit eines Stellungswechsels vorausbestehen; denn es liegt eine Verweisung auf mannigfaltige Gelegenheiten der Stellungeinnahme vor.

Eine solche Stellung, welche ein Gegenstand in einem Zusammenhang als auswechselbare einnimmt, heißt eine Stelle. Sie ist auf eine Mannigfaltigkeit von Stellen bezogen, welche ebensoviele Möglichkeiten der Stelleneinnahme bietet. Ein isolierter Gegenstand besetzt aber eine ausgezeichnete Stelle, die ihn in seiner Eigenart besonders zur Präsentation gelangen läßt.

Soll daher auch der Isoliertheit der Elemente einer Menge ein greifbarer Sinn abgewonnen werden, so wird es unumgänglich, diese auf eine Stellenmannigfaltigkeit zu beziehen, welche erst das Hervortreten von Teilen aus einem Zusammenhange möglich macht. Es soll deshalb auch von der Gestelltheit der Elemente einer Menge gesprochen werden. Der zuerst gebrauchte Ausdruck der Stelleneinnahme ist insofern nicht angemessen, als Einnahme die Eigenständigkeit des Wechsels oder Behaltens einer Stelle in sich schließt. Die Teile einer Menge aber, z. B. Zahlen, sind in diesem Sinne weit davon entfernt, Stellen einzunehmen. Es darf eben keine Identifizierung des Sinnes von Stelle mit dem von „Ort“ oder gar von „Platz“ stattfinden. Denn diese Bedeutungen sind regional beschränkt, während für den Sinn von „Stelle“ diese Schranken dem Wesen einer Menge entsprechend nicht bestehen können.

Ebenso ursprünglich, wie das Zumalgegebene als „gestellt“ verstanden wird, kommt auch seine Abgeschlossenheit in den Blick. Deren bisher nur formal geführte Kennzeichnung kann durch den Hinweis auf eine gewisse vulgäre Bedeutung des Terminus weitere Auslegung erfahren. Ein Mensch etwa lebt abgeschlossen, wenn mit ihm niemand in engerer Berührung steht. Ein Zimmer heißt abgeschlossen, wenn es gegen das Eindringen unberufener Elemente geschützt ist. Wird daher allgemein das Zusammengehörige als abgeschlossen begriffen, so wird es als solches verstanden, in dessen Zusammenhang sich nichts weiteres, für welches die Möglichkeit gegeben wäre, hineinmischt.

Die Zusammengehörigkeit der Teile einer Menge kann sich daher nur in dem Sinne als abgeschlossen erweisen, als mit den Elementen kein weiterer oder gar beliebiger Gegenstand im Blicke

steht, der das Zumalgegebensein mit ihnen teilte. Hierfür aber ist Voraussetzung, daß das Zumalgegebene über etwas verfügt, das sich „zwischen" das andere und es selbst hineinschiebt und die Vermengung schlechthin verhindert. Dieses Medium zwischen Zumalgegebenem und anderem soll sein Horizont heißen. Jede Zumalgegebenheit ist demnach als solche horizonthaft.

Gehört aber Horizonthaftigkeit zum Wesen einer Menge, d. h. zur Bedingung der Möglichkeit ihrer Vergegenständlichung, so liegt darin, daß jede Menge sich immer schon als über einen Horizont verfügend, d. h. durch ihn gegen anderes sich abgrenzend, darstellen muß. Dieser Charakter einer Menge aber scheint mit dem explizierten der Zusammengehörigkeit unvereinbar zu sein. Denn diese bedeutete Gemeinsamkeit des Im-Blick-Stehens der Elemente selbst verwies alles weitere aus dem Gesichtsfelde des erkennenden Erfassens. Sollte aber diese Gemeinsamkeit als horizonthaft verstanden werden, so wäre gerade Bezug zu nehmen auf jenes weitere, wogegen die Abgrenzung vollzogen wird, müßte also auch dieses in gewisser Weise „gegeben" sein.

Es erhebt sich in der Tat mit der Frage, wie es möglich ist, daß eine Menge oder allgemein ein Ganzes isolierter oder isolierbarer Teile nicht nur abgeschlossen ist, sondern auch als abgeschlossen sich darstellt, die erste bedeutende Schwierigkeit, deren für alles weitere fundamentale Lösung vom rechten Verständnis des Sinnes von „Gegebensein" bezw. „im Blicke stehen" abhängt. Es soll deshalb zunächst der Lösungsversuch auf exemplarischem, das allgemeine Problem nur erst in der Anwendung berührendem Wege, veranschaulicht werden. — Tritt im verdunkelten Raum ein Projektionsapparat in Tätigkeit, so erscheint das im Strahlenkegel Befindliche als belichtet. Die Leinwand, auf die hin projiziert wird, die Staubteilchen, die den Strahlengang kreuzen, sowie das projizierte Bild sind belichtet. Belichtetheit selbst ist keine Eigenschaft der Dinge, sondern eine Weise ihres Gegebenseins; und zwar eine solche, die sie in ihrer individuellen Eigenart in hervorragendem Maße sich zeigen läßt. Neben dem Belichteten aber ist das Unbelichtete nicht einfach nicht da, schlechthin verdrängt, sondern seinerseits in einem gewissen Ausmaße zugänglich. Diese Zugänglichkeit des Unbelichteten, obwohl sie hinter der des Belichteten gleichsam zurücksteht, ermöglicht es erst, daß es nicht nur ein belichtetes Bild gibt, sondern das Bild immer schon als belichtet, allgemein als horizonthaft gegeben Gegenstand wird. Nur im Blick auf Unbelichtetheit kann sich etwas als belichtet offenbaren. Die ausschließende Gegebenheit des einen verhindert für das andere nicht überhaupt jede Gegebenheit, sofern zu verschiedenen Gegebenheitsweisen die Möglichkeit vorliegt.

Vermag man daher die exemplarisch auf die Gesichtswahrnehmung hin orientierte Bedeutung von Belichtetheit zu formalisieren, so

muß es gelingen, die Horizonthaftigkeit nicht nur als zum Wesen eines projizierten Bildes, sondern eines Bildes überhaupt, sowie einer Menge gehörig zu erweisen. Es möge deshalb unter Belichtetheit eine Form des Gegebenseins verstanden werden, die den Gegenstand, gleichgültig auf welchem Wege, zur eigentlichen Darstellung seiner individuellen Eigenart gelangen läßt. Unter Unbelichtetheit dagegen eine Gegebenheitsweise, die auf den Gegenstand ohne eigentliche Darstellung seiner Eigenart nur Bezug nehmen läßt.

Betrachtet man ein Bild, so ist seine Horizonthaftigkeit sowie sein als horizonthaft Gegebensein undiskutierbar. Das Bild steht im Blick, heißt eben nicht, es ist schlechthin nichts als allein es selbst gegeben, vielmehr ist auch das, was Nichtbild ist, als das unbelichtete andere mitgegeben, immer schon mit im Blick. Das Gleiche trifft auch für die Mengenvergegenständlichung zu. Das „Gegebensein" der Teile einer Menge darf nur als eigentliche, „belichtete" Gegebenheit verstanden werden und schließt die Gegebenheit, wiewohl Andersgegebenheit des anderen nicht aus, sondern ein. Und eben darin liegt der Grund der Möglichkeit, daß sich das Zumalgegebene als horizonthaft, d. h. letztens als zumalgegeben, eine Menge als abgeschlossen darzubieten vermag.

Durch Ausdeutung der Begriffe von Isoliertheit und Abgeschlossenheit konnte der Sinn von Zumalgegebenheit weitere Klärung erfahren. Das Zumalsein der Teile einer Menge als verschiedener erwies sich als ein Zumalgestelltsein, indem die Teile als isolierte auf eine Stellenmannigfaltigkeit bezogen sind. Und die Gegebenheit der Teile enthüllte sich als belichtete Gegebenheit, welche in ihrer Horizonthaftigkeit auf Nichtbelichtetheit verweist. Die durch horizonthafte Gestelltheit determinierte Zumalgegebenheit soll als die Räumlichkeit einer Menge bezeichnet werden. So ergibt sich: Eine Menge ist vor jeder und für jede Vergegenständlichung ihrem Wesen nach schon immer auf Räumlichkeit hin entworfen.

§ 3.
Die Räumlichkeit eines Zeugganzen.

Die Ansetzung einer für das Mengesein konstitutiven Räumlichkeit bedarf einer terminologischen Rechtfertigung, um so eher, als sie den eigentlichen Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen bildet. Denn es handelt sich um ein Phänomen, das in einem „ursprünglichen" Sinne gerade nicht am Seienden, welches man Menge nennt, vorzufinden ist, ja vielfach so wenig mit dem „ideellen" Sein von Mengen oder Zahlen in Zusammenhang gebracht wird, daß man dieses gerade als außerhalb von Raum und Zeit stehend auszulegen versucht[1]). Es muß also in der Gegen-

[1]) Vgl. § 5.

überstellung zu einer ursprünglichen Räumlichkeit dargelegt werden, in welchem Sinne eine Art der Verwandtschaft bezw. Abkünftigkeit für die das Mengenphänomen bestimmenden Strukturen bestehen mag, welche die Benennung begründen könnte.

Der Titel Räumlichkeit kann zunächst nach den Untersuchungen M. Heideggers [2]) als „Kategorie" oder als „Existenzial" gebraucht [3]) und die Art der strukturellen Verflechtung der beiden Phänomene [4]) Anlaß werden, die Räumlichkeit des Daseins als die ursprüngliche zu bestimmen. Ist aber, dem Gang der Untersuchung nach, eine Beschränkung auf die Seinscharaktere von nicht-daseinsmäßig Seiendem geboten, so bleibt noch eine zweifache Möglichkeit des Sinnes von „ursprünglicher" Räumlichkeit bestehen. 1. Die existenziell zunächst entdeckte: Räumlichkeit des Zuhandenen; 2. Die wissenschaftlich zuerst thematische: Räumlichkeit des Vorhandenen. Obwohl prinzipiell kein Anlaß zu einer Bevorzugung gegeben wäre, soll die uns vorliegende Analyse der Räumlichkeit des innerweltlich Zuhandenen und deren Beziehung zu möglichen Modifikationen [5]) zugrundegelegt werden.

„Das Zeug hat seinen Platz, oder aber, ‚es liegt herum' . . . . Der jeweilige Platz bestimmt sich als Platz dieses Zeugs zu . . . . aus einem Ganzen der auf einander ausgerichteten Plätze des umweltlich zuhandenen Zeugzusammenhangs . . . Der Platz ist je das bestimmte ‚dort' und ‚da' des Hingehörens eines Zeugs . . . Der platzierbaren Hingehörigkeit eines Zeugganzen aber liegt als Bedingung ihrer Möglichkeit zugrunde das Wohin überhaupt, in das hinein einem Zeugzusammenhang die Platzganzheit angewiesen wird. Dieses . . . Wohin des möglichen zeughaften Hingehörens nennen wir die Gegend. /Abs./ ‚In der Gegend von' besagt nicht nur ‚in der Richtung nach', sondern zugleich im Umkreis von etwas, was in der Richtung liegt. Der . . . Platz ist schon auf eine Gegend und innerhalb ihrer orientiert . . . Diese gegendhafte Orientierung der Platzmannigfaltigkeit des Zuhandenen macht das Umhafte, das Um-uns-herum des umweltlich nächstbegegnenden Seienden aus" [6]).

Ein Zweifaches die Räumlichkeit eines Zuhandenen, bezw. Zeugganzen zentral Bestimmendes soll aus dem Zitat entnommen werden. Zunächst zeigt sich, daß das Zuhandene, um als solches begegnen zu können, immer schon auf so etwas wie Stelle hin orientiert ist, die ihm erst Gelegenheit gibt, sich als das „Womit einer Bewandtnis" in unauffälliger Verfügung stehend darzubieten. Diese Gelegenheit aber ist keine beliebige, dergegenüber sich das Zuhandene

---

[2]) Sein und Zeit, Halle a. S., 1927, §§ 22—24.
[3]) Vgl. a. a. O. § 9 Ende.
[4]) Über den Begriff des Phänomens s. a. a. O. § 7 A.
[5]) a. a. O. §§ 22 u. 24; z. vgl. auch § 69 b, insb. S. 361 f.
[6]) a. a. O. S. 102/03.

seinem Wesen nach gleichgültig verhielte, vielmehr als aus einer Mannigfaltigkeit von Gelegenheiten heraus gewählte dem Zuhandenen immer schon angewiesen. Eine solche Stelle, an die das Seiende nicht einfach gestellt ist, sondern an die es zufolge seiner bewandtnismäßigen Zugehörigkeit zu einem Zeugganzen „hingehört", wird sein Platz genannt. Das Zuhandene ist, so ergibt sich als erster Charakter seiner Räumlichkeit bezw. deren eines Zeugganzen, immer schon platziert. — Es kommt aber des weiteren das Zeug nicht einfach mit einer Mannigfaltigkeit anderen Zeugs beliebig zusammen vor, sondern begegnet nur „innerhalb" eines Zeugzusammenhangs und daher schon immer getrennt von solchem außerhalb seiner Stehenden. Dieses „Im Umkreis wovon" einem Zuhandenen sein Platz angewiesen wird, welches erst die Abgeschlossenheit des Zeugganzen ermöglicht, wird die Gegend genannt. So ist allgemein „gegendhafte" Orientierung für das Zuhandene als solches charakteristisch. Seine Räumlichkeit, bezw. die des Zeugganzen aber kann man zusammenfassend als gegendhafte Platziertheit bezeichnen.

Leuchtet eine gewisse Analogie zwischen der Räumlichkeit des Zeugganzen und der das Sein einer Menge bestimmenden horizonthaften Gestelltheit ein, so läßt sich doch die Unterschiedenheit ihrer Strukturen nur dann klarer herausstellen, wenn der Wendung nachgegangen wird, die das zunächst gebundene Seinsverständnis bei der Vergegenständlichung von Mengen genommen haben muß, um nach der zunächst entdeckten Räumlichkeit des innerweltlich Zuhandenen die von Mengen in den Blick zu bekommen. Es liegt nahe, jene Modifikation des Seins vergleichend heranzuziehen, durch welche das zunächst Zuhandene als bloß noch Vorhandenes gänzlich neuen Bestimmungen zugänglich wird. „Die Plätze . . . des zuhandenen Zeugs sinken zu einer Stellenmannigfaltigkeit für beliebige Dinge zusammen. Die Räumlichkeit des innerweltlich Zuhandenen verliert mit diesem ihren Bewandtnischarakter" [7]). Der Raum als Gegend wird zum homogenen Naturraum „entschränkt", der „sich nur auf dem Wege einer Entdeckungsart des begegnenden Seienden, die den Charakter einer spezifischen Entweltlichung der Weltmäßigkeit des Zuhandenen hat" [8]) zeigt.

Offenbar aber kommt diese Art der „Verräumlichung" eines Ganzen durch „Entweltlichung" der Welt dem Sinne von Räumlichkeit einer Menge kaum näher. Ein zuhandenes Zeugganzes ist ebensowenig eine Menge wie vorhandene Natur, obwohl beides zum Mengesein „umschlagen" kann. Vor allem ist für diese Ganzheiten im Unterschiede von den Mengen bezeichnend, daß von der Art der notwendigen Zusammengehörigkeit der Teile, gerade sofern sie einen Ort, bezw. Platz besitzen, nicht abgesehen werden kann, wäh-

[7]) a. a. O. S. 112.
[8]) a. a. O. S. 112.

rend von der sachlichen Art des Zusammengehörens der Mengenelemente gerade abgesehen werden muß. Das Sichbefinden an einem Ort bezw. einem Platz gehört zum Sein des Vorhandenen, bezw. Zuhandenen wesenhaft dazu, sodaß der Sinn jener Phänomene von vornherein regionaler „Beschränkung" unterliegt. Mengen, zu deren Wesen es gehört, Seiendes von ganz beliebiger Seinsart vereinigen zu können, erhalten diese Regionalitätsunabhängigkeit nur dann, wenn der Sinn von Platz bezw. Ort eine vollständige „Entschränkung" erfährt, die ihn nicht nur zu einem beliebigen, sondern auch gegenstandsgleichgültigen Woran des Gegebenseins werden läßt. Das Gleiche gilt für die Wandlung des Sinnes von „Gegend" zu dem von „Horizont", der nicht mehr das Wohin eines zeughaften Hingehörens, sondern das bloße Worinnen einer gleichmäßigen (speziell der belichteten) Gegebenheit zum Ausdruck zu bringen hat.

Es kann allerdings nicht daran gedacht werden, das Problem des Geschehens der „Thematisierung" eines Seienden und des Ursprungs einer positiven Wissenschaft[9]) auch nur anzuschneiden; vor allem deshalb nicht, weil die Ausarbeitung dieser Fragen spezielle regionalontologische Untersuchungen, wenigstens in einem gewissen Umfang, bereits voraussetzt. Es ist daher nur darauf hinzuweisen, daß es zum vollen Verständnis auch der Räumlichkeit einer Menge, wie der nachfolgend zu explizierenden Zeitlichkeit des Hineinstellens der Analysen in das größere den regionalontologischen Rahmen sprengende Problem des Ursprungs der mathematischen Wissenschaft bedürfte, innerhalb dessen nur die zu behandelnden Phänomene ihre eigentliche und vollständige Belichtung erfahren könnten.

§ 4.
Die Endlichkeit einer Menge.

Es soll dargelegt werden, daß die Endlichkeit einer Menge an deren räumliche Konstitution derart gebunden erscheint, daß Endlichkeit und Räumlichkeit identifiziert werden kann, indem diese das Woraufhin des Entwurfs nicht nur des Wesens einer Menge überhaupt, sondern des Wesens einer endlichen Menge als endlicher darstellt. Endlichkeit aber wird nur verstanden im Hinblick auf und in Abgrenzung gegen mögliche Unendlichkeit. Der Nachweis der Identität von Endlichkeit und Räumlichkeit hat daher zu zeigen, 1. daß das apriorische Konstitutiv einer endlichen Menge einzig in der Räumlichkeit besteht, und 2. daß diese Konstitution dem Wesen einer unendlichen Menge schlechthin widerstreitet.

Eine methodische Schwierigkeit soll nicht unerwähnt bleiben, mit der dieses Vorgehen, wiewohl unvermeidlich, zu rechnen hat. Kann nämlich die Herausstellung des Phänomens der Endlichkeit

[9]) Vgl. a. a. O. S. 363.

nur in der Gegenüberstellung zum Phänomen der Unendlichkeit vollzogen werden, so ist für die ausdrückliche Thematisierung des Endlichen ein Vorverständnis der apriorischen Konstitution auch des Unendlichen vorauszusetzen. Die nur vergleichsweise führbare Analyse der endlichen Mengen bleibt also notwendig zunächst unvollständig und der ergänzenden Rechtfertigung durch Thematisierung der unendlichen Mengen immer bedürftig. — Das für die Erörterung der Endlichkeit qua Räumlichkeit setzungsweise vorauszunehmende Phänomen aber ist die Zeitlichkeit.

Die Diskussion des nächstliegendsten Einwandes gegen die These, daß die Endlichkeit einer Menge durch ihre Räumlichkeit, also Zumalgegebenheit, bestimmt sei, gibt Gelegenheit, auf die Bedeutung von Räumlichkeit als einer kategorialen Bestimmung nach einer neuen Richtung hin einzugehen. Die Orientierung des Einwandes ist, wie sich aus der Berufung auf gewisse Erfahrungstatsachen sogleich ergeben wird, die psychologistische, also jene, die ontologische Erkenntnis von jeher am verhängnisvollsten mit Mißdeutung bedroht. — Die Räumlichkeit einer Menge wurde darin gesehen, daß die Teile dieses zusammengesetzten Gegenstandes schon immer als horizonthaft gestellt, als zumalgegeben, bei jeder individuell bestimmenden Erfassung verstanden werden. Bedenkt man aber die Art und Weise, in der die endlichen Mengen wirklich zur Erfassung gelangen, so läßt sich bemerken, daß die geforderte Bedingung der Räumlichkeit zwar teilweise für jede Mengenerfassung erfüllt scheint, daß es jedoch nur die wenigen relativ umfangsarmen Mengen sind, zu deren Kennzeichnung diese Bedingung von sich aus ausreicht. Wird etwa die Menge der Punkte einer Würfelseite oder die Menge der Klassen der Kantischen Kategorientafel erfaßt, d. h. konkret gegenständlich (z. B. mit der Frage, wieviel solcher Klassen es gäbe), so scheint es allerdings zuzutreffen, daß die Teile als horizonthaft gestellt, genauer als zumal aufgenommen Gegenstand werden. Jeder Teil tritt als für sich erfaßt zusammen mit den übrigen aus dem Ganzen heraus, das seinerseits in seinem Abschluß gegen Weiteres in Augenschein genommen wird. Die Verhältnisse ändern sich jedoch völlig, wenn nur wenig größere Mengen, schon solche, deren Anzahl nur oberhalb von 12 liegt, ins Auge gefaßt werden, ganz zu schweigen von den Millionen- und höheren Mengen, mit denen vor allem die Naturwissenschaften zu tun haben. Tritt man etwa vor einen Schrank voll von Büchern oder in einen Saal voll von Menschen, so ist es, auch wenn man das Ganze zu überblicken vermag, einfach ausgeschlossen, sämtliche Teile in ihrer Isolierung zumal aufzunehmen. Es gehen vielmehr gerade die allermeisten Teile beim Versuch einer Zumalerfassung im Ganzen völlig unter, nur für wenige Elemente vermag sich allenfalls die für sämtliche Elemente bestehende Bestimmung der Isoliertheit unter dieser Bedingung auszuweisen. Zumalgegebenheit ist also für die Ver-

gegenständlichung der meisten endlichen Mengen gerade nicht charakteristisch. Sollen vielmehr deren Teile als isolierte wirklich zur Erfassung gelangen, so müssen sie unter Aufgabe der räumlichen Orientierung „nacheinander" aufgenommen und als nacheinander zu erfassen verstanden werden. Um aber so etwas wie ein Nacheinander von Aufnahmeakten zu begreifen, bedarf es des Hinblicks auf Zeit. Also sind endliche Mengen nicht nur durch Räumlichkeit bestimmt, sondern müssen auch als durch Zeitlichkeit konstituiert erneut in Ansetzung gebracht werden. — Diese Argumentation beruht dem Obersatze nach auf einer Verkennung des Phänomens der Räumlichkeit, woraus sich die Unrechtmäßigkeit der Schlußfolgerung herleitet, besteht dem Untersatze nach jedoch völlig zu Recht. Es kann gar keinem Zweifel unterliegen, daß die Erfassung der meisten endlichen Mengen nur im Hinblick auf Zeit, der die Teile als nacheinander zu durchlaufende verstehen läßt, möglich wird; oder, wie E. Husserl das ausdrückt: „daß die Succession in der Zeit eine unaufhebbare psychologische Vorbedingung für die Bildung weitaus der meisten Zahlbegriffe und konkreten Vielheiten — so gut wie aller komplizierten Begriffe überhaupt — bildet" [1]). — Die Widerlegung des Einwandes hat nun ein Zweifaches zu erweisen:

1. daß das Faktum des Nacheinandererfaßtseins der Elemente der meisten endlichen Mengen so wenig etwas gegen deren Zumalgegebenheit, also Räumlichkeit, zu sagen vermag, daß es sie gerade seinem Begriffe nach immer schon voraussetzen muß, und

2. daß das Faktum nichts für die zeitliche Konstitution endlicher Mengen anzubringen fähig ist.

Die zu widerlegende erste Prämisse der Argumentation beruht auf der psychologisierenden Identifizierung des Sinnes von Gegebensein und des von Erfaßt- oder Aufgenommensein. Wird die Zumalgegebenheit als Zumalerfaßtheit ausgelegt, so bezeichnet sie eine besondere Art, in welcher ein Gegenstand zur individuellen Vernehmung gelangt. Steht man etwa in der Nähe eines Waldes und stellt sich die Frage, ob man einen Laub- oder Nadelwald vor sich habe, so ist diese Frage nur zu entscheiden, wenn man den Gegenstand durch die Wahrnehmung zur Aufnahme gelangen läßt. Für die Art der Aufnahme bestehen die beiden Möglichkeiten, sich auf den Gegenstand in einem einzigen Akte des Wahrnehmens zu beziehen oder sich durch mehrere nacheinander erfolgende des Gegenstandes auch noch im einzelnen zu bemächtigen. In der Reflexion erscheint dann der zusammengesetzte Gegenstand im ersten Falle als „auf einmal" aufgenommen, im zweiten als „nacheinander" erfaßt.

Offenbar ist dieses Auf-einmal-Erfassen für die Kennzeichnung des Aktes der Aufnahme eines zusammengesetzten Gegenstandes,

[1]) Philosophie der Arithmetik, S. 24/25.

also auch einer Menge, von zentraler Bedeutung. Begreift man daher etwa den genannten Wald durch eine Wendung des Seinsverständnisses als eine Menge von Bäumen, so wird sich die Art der Inaugenscheinnahme des Ganzen in der Reflexion als Zumalerfassung feststellen lassen. Gilt es aber, wie es zur individuellen Kennzeichnung einer jeden Menge erforderlich ist, auch ihre isolierten Teile sämtlich einzeln zu Gesicht zu bringen, so ist solches bei allen größeren Mengen nur in der Nacheinandererfassung durchführbar. Behauptet man daher, daß für das Verständnis einer Menge als eines Ganzen isolierter Teile einzig das Verstehen von Zumalgegebenheit qua Zumalerfaßtheit konstitutiv ist, so gerät man in Widerspruch mit der Erfahrung, welche lehrt, daß nur bei den wenigsten Zumalerfassungen die Teile als isolierte sichtbar werden, es vielmehr, um dieses zu erreichen, des successiven Erfassungsvollzuges bedarf.

Es läßt sich von vornherein annehmen, daß diese psychologistische Auslegung des Sinnes von Räumlichkeit deren Bedeutung als eine ontologische Bestimmung mißversteht und daher auch zu verkehrten Konsequenzen gelangen muß. Denn konstituiert, wie behauptet wurde, Zumalgegebenheit das Wesen des Gegenstandes selbst, so kann mit ihr auch noch keine Art der Erfaßtheit seiner, sondern muß eine Weise seines Seins, eine apriorische Bestimmtheit des Gegenstandes selbst zum Ausdruck kommen.

Zumalgegebenheit oder horizonthafte Gestelltheit ist daher nichts mit Bezug auf einen zusammengesetzten Gegenstand Feststellbares, sondern die Weise seines Seins, in der er bereits begegnen muß, soll eine wie immer geartete Bestimmung über ihn als das, was er ist, getroffen werden können. Sie meint nichts anderes als das gleichmäßige Offenstehen seiner isolierten Teile als belichteter [1]) für ein (lichtempfängliches) erkennendes Erfassen, sei es, daß dieses auf einmal, sei es, daß dieses successive vollzogen wird. Man kann deshalb die Zumalgegebenheit auch als Zumalzugänglichkeit bezeichnen.

So setzt etwa das Zählen der Bäume des Waldes oder das Zutunhaben mit den Teilen eines Zeugganzen das Verständnis ihrer Zumalvorhandenheit bezw. -zuhandenheit immer schon voraus. Es wäre widersinnig, durch Wahrnehmung feststellen zu wollen, daß die Teile des Ganzen „wirklich" zumalgegeben seien. Was auf dem Grunde des Verstehens von Zumalgegebenheit festgestellt werden kann, ist höchstens ihr Zumalerfaßtsein. Ob es sich schließlich um eine vorhandene (in weiterem Sinne) Menge handelt, für welche das genannte Apriori am ehesten einleuchten möchte, oder ob eine sogenannte abstrakte endliche Menge, wie eine Menge von Zahlen oder von Begriffen, problematisch ist, der Entwurf auf Zumalgegeben-

[1]) Vgl. 15.

heit ist in jedem Falle Bedingung. Denn auch die individuelle Bestimmung der Teile solcher Mengen rechnet immer schon mit einer Mannigfaltigkeit von Stellen, an welchen als dem prinzipiell zumal Zugänglichen die jeweiligen Teile erst nacheinander aufgesucht werden können.

Wenn sich demnach gegen den erhobenen Einwand bestätigen läßt, daß Räumlichkeit das Wesen einer jeden endlichen Menge konstituiert, so liegt darin, daß der in der Nacheinandererfaßtheit der Teile zum Ausdruck kommende Bezug auf Zeit für das Wesen der Menge selbst nichts austragen kann. Vielmehr dokumentiert sich in diesem Faktum, welches Grund zu einer Einwendung zu geben schien, nur die ontische Beschränktheit unseres Aufnahmevermögens, das stets einer solchen idealisierenden Entschränkung fähig gedacht werden kann, daß die unmittelbar zeitliche Orientierung der Mengenerfassung schwindet. Es zeigt sich eben auch in diesem Falle, daß die ontisch bestehenden Fähigkeiten den ontologisch gesetzten Möglichkeiten nicht kongruent sind. Die zeitliche Konstitution muß also schon jetzt für die endlichen Mengen in einem unmittelbaren Sinne, der freilich seine Klärung erst erfahren wird, abgelehnt werden. Das schließt jedoch nicht aus, daß auch die Endlichkeit mittelbar auf die Zeitlichkeit bezogen ist, sofern die Räumlichkeit letztlich in der Zeitlichkeit — beide hier nur als spezielle Kategorien zu verstehen — gründet.

Es bleibt noch übrig, darauf hinzuweisen, daß die unendlichen Mengen der räumlichen Bestimmtheit widerstreiten, auch wenn die Räumlichkeit am Aufbau ihrer Wesenskonstitution mitbeteiligt ist. Der Sinn der unendlichen Mengen durchschlägt die horizonthafte Gestelltheit, ohne sie allerdings schlechthin aufzugeben. Die Elemente unendlicher Mengen werden zu ihrem unendlichen Teil gerade nicht als gestellt, sondern wesenhaft als stellenlos verstanden. Zusammengehörigkeit, Abgeschlossenheit und Isoliertheit erhalten als die wesentlichen Mengenbestimmungen für unendliche Mengen einen völlig neuen Sinn. So ergibt sich allgemein, daß die Unterschiedenheit endlicher und unendlicher Mengen nicht nur in einer Verschiedenheit ontisch feststellbarer Eigenarten bestehen mag, sondern als Wesensunterschied auf einer je verschiedenen Seinsstruktur beruht. Als ontologische Grundstruktur der endlichen Mengen wurde die Räumlichkeit herausgestellt. Als ontologische Grundstruktur der unendlichen Mengen gilt es nunmehr, die Zeitlichkeit zu entwickeln.

Der grundsätzlichen Bedeutung, welche die vorausgegangenen Analysen für den Ansatz und die Durchführung der weiteren Untersuchungen notwendig gewinnen müssen, soll Rechnung getragen werden, indem in kurzer historischer Orientierung an Kant und Husserl für gewisse prinzipielle Erwägungen eine Bestätigung gesucht, andererseits bei differierender Einstellung eine knappe Auseinandersetzung gegeben werden soll.

§ 5.

Husserls Begriff der kollektiven Verbindung.[1])

Schon die allgemeinste Kennzeichnung einer Menge als eines zusammengesetzten Gegenstandes rückt die Art der Beziehung der Teile des Ganzen zueinander von vornherein ins Zentrum einer Wesensbetrachtung. Sie wurde im Vorangehenden zunächst durch den Begriff der Zusammengehörigkeit charakterisiert und sodann auf Zumalgegebenheit (Räumlichkeit) hin ausgelegt. Auch für Husserls in der „Philosophie der Arithmetik" gegebene Analyse der „logischen" und „psychologischen" Konstitution der Begriffe Menge und Anzahl[2]) steht daher die Verbundenheit der Teile des Ganzen, das Menge genannt wird, die dieses von anderen Ganzheiten sich abheben läßt, im Vordergrunde des Interesses. Jedoch gelangt Husserl, wiewohl am gleichen Phänomen orientiert, zum wesentlich abweichenden Ergebnis, daß „weder die Zahlbegriffe noch die Zahlverhältnisse, geschweige denn die ganze Arithmetik mit der Raumvorstellung etwas zu schaffen haben"[3]). Offenbar ist es der eigentliche Sinn des Satzes, auch wenn ihm seiner kritischen Absicht nach, aus der er erwächst, zuzustimmen wäre, jedwede Räumlichkeit (als welche freilich die Räumlichkeit des Vorhandenen in betracht gezogen wird) als für Mengen konstitutiv in Abrede zu stellen. Es wird daher notwendig, kurz entgegenzusetzen, auf welchem Wege Husserl eine Charakteristik der Verbundenheit der Teile einer Menge ohne Berücksichtigung des Phänomens der Räumlichkeit geben zu können glaubt, um zu sehen, welche Möglichkeiten für eine Kritik seiner Gegenthese bestehen[4]).

Für die grundsätzliche Orientierung des Werkes ist bereits der Gesichtspunkt bezeichnend, dem die Gliederung in seine beiden Teile entnommen ist. Es wird unterschieden zwischen „eigentlichen" und „symbolischen" Begriffen von Menge und Anzahl und unter einer eigentlichen Mengenvorstellung eine solche verstanden, deren Teil-„Inhalte . . . uns als für sich bemerkte bewußt sind"[5]). Es gibt also die für das Wesen einer Menge irrelevante Art ihrer empirischen Erfassung Anlaß zu einer Zweiklasseneinteilung der endlichen Mengen und Anzahlen und entsprechenden Gliederung der Untersuchung, die offenbar nicht nur der psychologischen Beschreibung eines Sachgehaltes, sondern ebensosehr der Angabe seiner „logischen Bedeutung"[6]) dient, also auf Wesenscharaktere von endlichen Men-

[1]) Philosophie der Arithmetik, 1. Bd., 1891, insbesondere Kap. I. u. III.
[2]) Vgl. a. a. O. S. 7.
[3]) Vgl. a. a. O. S. 41.
[4]) Selbstverständlich darf die Position der Philosophie der Arithmetik noch nicht überall als „Phänomenologie" verstanden werden, die vielmehr gerade die Handhaben für eine kritische Einstellung erst lieferte.
[5]) a. a. O. S. 18. Vgl. auch S. 10, 68, 215.
[6]) a. a. O. S. 28.

gen überhaupt abzielt. Es muß deshalb von vornherein schon die Frage entstehen, ob nicht vielleicht diese das Werk durchziehende Doppelorientierung auf das Wesen einer Menge und die Art ihrer empirischen Erfassung hin auf die Wesensanalyse der für die „eigentlichen" Mengenbegriffe konstitutive Art der Verbundenheit der Teile ihren Schatten wirft.

„Jene, in allen Fällen, wo von Vielheiten die Rede ist, gleichartigen Verbindungen sind nun die Grundlage für die Bildung des Allgemeinbegriffes der Vielheit" [7]). „Wir wollen . . . zur Bezeichnung der Verbindung, welche den Inbegriff [(für Menge gesetzt [8]))] charakterisiert, den Namen kollektive Verbindung verwenden" [9]). „ . . . Wiesen wir auf den Punkt hin, auf welchem unser besonderes Interesse ruht und vermöge dessen die Vielheit eben als Vielheit anderen Ganzen gegenüber charakterisiert wird" [10]).

Für die nähere Kennzeichnung dieser Verbindung wird nun davon ausgegangen, daß mit ihr bezüglich der Teile eines Ganzen eine bestimmte Relationsart zum Ausdruck kommt. Doch „da wir wissen, daß die heterogensten Inhalte in kollektivischer Weise vereinigt werden können, so entfallen [als die kollektive Verbindung bestimmend] unbesehen alle Relationen, deren Anwendungsgebiet ein durch die Natur besonderer Inhalte beschränktes ist . . . Es scheint also nichts übrig zu bleiben, als für die kollektive Verbindung eine neue und von allen anderen wohlgeschiedene Relationsklasse in Anspruch zu nehmen" [11]).

„Man kann . . . die Relationen . . . klassifizieren nach ihrem eigenen phänomenalen Charakter . . . 1. Relationen, welche den Charakter von primären Inhalten (von ‚psychischen Phänomenen' in dem von F. Brentano definierten Sinne) besitzen. . . . 2. . . . Relationen . . . dadurch charakterisiert . . ., daß das Relationsphänomen ein psychisches ist. Richtet sich auf mehrere Inhalte ein einheitlicher psychischer Akt, dann sind im Hinblick auf ihn die Inhalte verbunden oder aufeinander bezogen" [12]).

„Sind die kollektiven Verbindungen im Vorstellungsinhalte des Inbegriffs als Teilphänomene . . . enthalten . . . oder ist im Vorstellungsinhalt selbst nichts von einer Verbindung zu bemerken, sondern nur in dem psychischen Akt, welcher die Teile einigend umschließt?" [13])

„ . . . daß wir uns für die zweite Auffassung entscheiden müssen, derzufolge die kollektivistische Einigung . . . nur in gewissen

---

[7]) a. a. O. S. 14.
[8]) Vgl. a. a. O. S. 8 Anm.
[9]) a. a. O. S. 15.
[10]) a. a. O. S. 16.
[11]) a. a. O. S. 68—69.
[12]) a. a. O. S. 72—73.
[13]) a. a. O. S. 76—77.

psychischen Akten, welche die Inhalte einigend umschließen, ihren Bestand hat . . . Fragen wir, worin die Verbindung bestehe, wenn wir z. B. eine Mehrheit so disparater Dinge wie die Röte, der Mond und Napoleon denken, so erhalten wir die Antwort, sie bestehe bloß darin, daß wir diese Inhalte zusammendenken, in einem Akte denken“ [14]).

Das für die Einheit einer Mengenvorstellung charakteristische verbindende Bezogensein der Elemente untereinander wird also geschaffen durch den einigenden Akt des Zusammendenkens, der die Teile einzeln und doch in Einem bemerkbar macht. Die Zumalerfaßtheit, wie diese aktbezogene Bestimmtheit zusammengesetzter Gegenstände genannt wurde [15]), wäre hiernach für Mengen als eigentliche Vielheiten konstitutiv.

Gemäß der Doppelorientierung der Husserlschen Untersuchungen zeigt dieses Ergebnis ein zweifaches Gesicht. Weist es darauf hin, daß es zum Vernehmen von eigentlichen Vielheiten eines besonderen psychischen Aktes bedarf, in welchem erst die Teile zusammen zur Erfassung gelangen, so vermag es sich auf ein psychologisches Faktum zu berufen, das in empirischer Reflexion festgestellt werden kann. In diesem Sinne wäre auch jene abschließende Bemerkung zu verstehen und auszulegen, der gemäß „die psychische Relation . . . eine unerläßliche psychologische Vorbedingung für jede Beziehung und Verbindung überhaupt ist“ [16]). Des weiteren aber wird die einigende Funktion des psychischen Aktes dazu benutzt, um die für das Wesen entscheidende gegenständliche Einheit der Teile einer Menge, durch welche sich diese von anderen Ganzheiten, etwa der Dingganzheit einer Rose [17]), unterscheidet, zu charakterisieren. Und zwar soll die Menge als Gegenstand (Husserl sagt, als Vorstellungsinhalt) gerade keine Verbundenheit der Teile, wie die Rose, aufweisen, sondern die in ihr liegende Verbindung, kollektive Verbindung genannt, einzig als psychische Relation sich darbieten.

Wenn aber für die Mengenvergegenständlichung einzig die Zumalerfassung konstitutiv erscheint, dann setzt das Verständnis von Mengen die Erfassung von Mengen immer schon voraus, sofern nur in der Reflexion auf ein Zumalerfaßtes dieses als Menge sich soll darstellen können. Offenbar aber ist das Bedingungsverhältnis gerade ein umgekehrtes. Um eine Menge zu erfassen und als erfaßte zu bestimmen, ist es notwendig, zu verstehen, was eine Menge sei, sie also als zusammengesetzten Gegenstand zu begreifen. Tritt man etwa in ein Zimmer und bemerkt dort fünf Menschen, so kann man ohne Zweifel dieses Be-

---

[14]) a. a. O. S. 79.
[15]) Vgl. § 4.
[16]) a. a. O. S. 81.
[17]) a. a. O. S. 77.

merken als Zumalerfassen bestimmen. Um aber den Akt des Erfassens als einigend zu verstehen, muß der intentionale Gegenstand bereits als geeinigt begriffen sein. Denn es gäbe sonst nichts, worauf jenes Zumal bezogen sein könnte. Mit dem Hinweis auf die Eigenart des Aktes, durch den eine Menge zur Erfassung gelangt, kann das Problem ihrer gegenständlichen Einheit nicht als im negativen Sinne gelöst, muß vielmehr als überhaupt unberührt gelten.

Die Motive, die Husserl innerhalb dieses Werkes zu einer solchen Einstellung führen mußten, treten dort selbst klar zutage. Es wird nämlich von vornherein, allerdings, wie gesagt, in wohl nicht unberechtigter kritischer Einstellung, der bedingende Zusammenhang der Mengen- und Zahlvorstellungen mit so etwas wie Räumlichkeit in Abrede gestellt. Bietet diese jedoch, wie die frühere Analyse [18]) zeigen sollte, die einzige Möglichkeit dar, die Verbundenheit der Teile einer Menge ontologisch zu begründen, so muß mit ihrer völligen Ausschaltung überhaupt jede für Mengen ansetzbare gegenständliche Einheit aus dem analysierenden Blick geraten — eine Konsequenz, der Husserl nicht aus dem Wege gegangen ist.

§ 6.

Über eine Kantische Auslegung des Mathematisch-Endlichen.

Am Anfang der Dissertation Kants findet sich eine Anmerkung, innerhalb deren eine gewisse Wesensumgrenzung des mathematisch Endlichen und Unendlichen vollzogen wird. Sie steht im engeren Zusammenhang einer Auseinandersetzung mit einigen unzulänglichen Gründen, aus denen heraus conceptus tam continui quam infiniti a plurimis reiiciuntur [1]): qui infinitum mathematicum actuale reiiciunt, non admodum gravi labore fuguntur. confingunt nempe talem infiniti definitionem ex qua contradictionem aliquam exsculpere possint . . . multitudinem infinitam vocant numerum infinitum, et hunc absonum esse docent, quod utique est in propatulo, sed quo non pugnatur nisi cum umbris ingenii. si vero infinitum mathematicum conceperint: ceu quantum quod relatum ad mensuram tanquam unitatem est multitudo omni numero maior, si porro notassent, mensurabilitatem hic tantum denotare relationem ad modulum intellectus humani, per quem non nisi successive addendo unum uni, ad conceptum multitudinis definitum et, absolvendo hunc progressum tempore finito, ad completum, qui vocatur numerus, pertingere licet: luculenter perspexissent, quae non congruunt cum certa lege cuiusdam subiecti, non ideo omnem intellectionem excedere, cum, qui absque successiva

---

[18]) s. o. § 2.

[1]) De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis. 1770 § 1.

applicatione mensurae multitudinem uno optutu distincte cernat, dari possit intellectus quanquam utique non humanus [2]).

Die Kantische Bemerkung enthält zwei bedeutsame Erkenntnisse, die der gegenseitigen Ergänzung dienen, zunächst in Richtung auf das mathematisch Unendliche, sodann mit Bezug auf das mathematisch Endliche. Kant wendet sich anfangs gegen die Widerlegung der Möglichkeit von etwas, die sich verkehrter Beweisgründe bedient, indem sie „nach der Gewohnheit der Dogmatiker einen fehlerhaften Begriff" [3]) von der Sache voranschickt. Betreffs des Unendlichen aber wäre folgende Argumentation zu bemängeln: das Unendliche kann, wenn überhaupt, so nur als Zahl begriffen werden. Zahl aber ist ein vollendeter Begriff der Vielheit, zu dem nur durch successives Aneinanderfügen der Einheit innerhalb einer endlichen Zeit zu gelangen ist. Rücksichtlich des Unendlichen nun gelangt das successive Aneinanderfügen zu keinem Ende. Also kann das Unendliche nicht als Zahl, also überhaupt nicht existieren.

Das πρῶτον ψεῦδος dieser und ähnlicher Überlegungen besteht offenbar darin, daß der Wesensunterschied, der Endliches von Unendlichem getrennt sein läßt, keine Beachtung findet, und diesem Charaktere zugewiesen werden, die gerade für jenes das Auszeichnende darstellen. Die Kantische Definition des Unendlichen, wiewohl mit ihr der eigentlich transzendentale Begriff noch nicht erreicht ist, trägt seiner Wesensart Rechnung, indem sie es in absoluten Gegensatz bringt zu allem, was als Zahl, d. i. als endliche Größe, begriffen werden muß.

Im zweiten Teil der Anmerkung vollzieht jedoch Kant eine Überlegung, die in einem mehr als allgemeinen Sinne als Bestätigung früher erreichter Ergebnisse anzusehen wäre. Die dogmatische Argumentation läßt nämlich noch einen zweiten Einwand zu, dessen Erörterung zu einer, wenn auch negativen, Wesensumgrenzung des Endlichen zu führen vermag. Kant gibt nämlich zu bedenken, daß die Bedingung der Zeit, unter welcher die Erfassung, d. i. sinnliche Anschauung endlicher Vielheiten, steht und die dementsprechend auch unendlichen Vielheiten zugewiesen wurde, gar keine das Wesen der Zahl als solches notwendig konstituierende Bedingung, sondern nur ein gewisses Gesetz (certa lex) unseres menschlichen Verstandes darstellt. Es wäre ein von diesem Gesetz unabhängiger Verstand immerhin denkbar, der mit einem Blick ohne successive Anwendung eines Maßes die Vielheit deutlich erfaßte. Bringt man daher den Begriff der Zeit mit dem eines endlichen Ganzen in Zusammenhang, so geht man noch insofern fehl, als man die Schranken des menschlichen Verstandes für jene hält, durch welche das Wesen der Dinge selbst umschrieben wird (limiti-

---

[2]) a. a. O. § 1 Anm.

[3]) vgl. Kritik der reinen Vernunft, Anm. zur 1. Antinomie (Thesis).

bus quibus mens humana circumscribitur, pro iis habitis, quibus ipsa rerum essentia continetur [4])).

Kant macht also den Ansatz, die Zeit als konstituierende Bedingung aus dem Wesen der Endlichkeit heraus zu interpretieren, und stimmt daher, was das Negative anbelangt, mit dem vorangehenden Ergebnis: Endlichkeit = Räumlichkeit, also Nicht-Zeitlichkeit, überein. Und zwar stützt er sich, früheren Überlegungen [5]) entsprechend, auf die ontische Beschränktheit unseres Aufnahmevermögens, das stets einer idealisierenden Entschränkung fähig gedacht werden kann, dessen Abhängigkeiten daher auch für das Wesen der Dinge selbst keine Relevanz erhalten.

Hingegen würde man völlig fehlgehen, wollte man versuchen, auch im Positiven eine Übereinstimmung herauszuanalysieren. Geschieht doch beim vorkritischen Kant die Herausnahme der Zeit aus der Endlichkeit nicht in der Absicht, nun den Raum als Konstitutivum zu entwickeln, sondern vielmehr umgekehrt mit der Tendenz, sowohl Raum wie auch Zeit als die Bedingungen der Sinnlichkeit aus dem Verstandesbegriff eines Ganzen, sei es eines endlichen, sei es eines unendlichen Ganzen, überhaupt zu eliminieren, indem die Verstandesbegriffe die Dinge nicht geben, wie sie erscheinen, sondern so, wie sie sind, also frei von jeder, wie immer beschaffenen subjektgegründeten Abhängigkeit [6]).

§ 7.

Der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen bei Husserl.

Eine weitere Bewährung soll die herausgestellte These von der wesentlichen Differenz im Sein der endlichen und der unendlichen Mengen durch einen Vergleich mit jener allgemeinen Charakteristik erfahren, innerhalb deren Husserl in der „Philosophie der Arithmetik“ eine absolute Scheidung der endlichen und der unendlichen

---

[4]) a. a. O. Ende von § 1.

[5]) Vgl. S. 50.

[6]) Dieser allgemeinen Orientierung entspricht die Einstellung, die Kant zum Problem der Unendlichkeit im größeren Rahmen einer Bestimmung der Welt als totalitas absoluta (§ 2 III) einnimmt. Sieht er nämlich das eigentliche Kreuz für den Philosophen in der Schwierigkeit wie die totalitas absoluta das Unendliche zu enthalten, d. h. aber unter den Bedingungen einer unendlichen Zeit zu stehen vermöchte, ohne sich selbst als completudo omnimoda zu widersprechen, so muß er auf eine Auflösung dieser Schwierigkeiten bedacht sein, die nur auf zweierlei Art erfolgen kann: entweder der Begriff der totalitas absoluta als Constitutivum der Welt wird aufgegeben, oder aber der Zeitbezug aus ihr eliminiert. Der vorkritische Kant entschließt sich prinzipiell für die zweite Möglichkeit, die Antinomienlehre dagegen zieht die Konsequenz aus der sogenannten Kopernikanischen Wendung mit aller Deutlichkeit in Richtung der ersten Art der Auflösung.

Mengen vollzog. Entsprechend der Einteilung dieses Werkes [1]) wird der Ausgang vom Endlichen her genommen und muß daher der Überschritt zum Unendlichen im besonderen problematisch werden.

Zunächst will es, was die endlichen Mengen betrifft, scheinen, daß die im Vorangehenden entwickelte konstitutionelle Einfachheit ihres Wesens bei Husserl einer Wesenszerspaltenheit Platz macht. Denn die endlichen Mengen werden von vornherein in die beiden Klassen der „eigentlichen" und „symbolischen" Vielheitsvorstellungen zerfällt und erfahren demgemäß eine getrennte Behandlung. „Ist uns ein Inhalt nicht direkt gegeben als das, was er ist, sondern nur indirekt durch Zeichen, die ihn eindeutig charakterisieren, so haben wir von ihm statt einer eigentlichen eine symbolische Vorstellung" [2]). „Nur unter besonders günstigen Umständen können wir konkrete Vielheiten von ungefähr einem Dutzend Elementen eigentlich vorstellen, d. h. faktisch . . . jedes ihrer Glieder als ein für sich bemerktes mit allen anderen zusammen in einem Akte befassen" [3]).

Würde Husserl an dieser Einteilung der endlichen Mengen als einer absolut notwendigen festhalten, dann wäre für die Endlichkeit selbst eine Wesensdifferenzierung in Anspruch genommen. Jedoch schon die Erörterung des Grundes, der als für die Einteilung bestimmend anzusetzen wäre, macht ersichtlich, daß sie in keinem Falle mit Rücksicht auf das Wesen der Gegenstände, sondern nur in ganz anders gearteter Orientierung erwachsen konnte. „Hätten wir von allen Zahlen eigentliche Vorstellungen, wie von den ersten in der Zahlenreihe, dann gäbe es keine Arithmetik, sie wäre vollkommen überflüssig . . . Tatsächlich sind wir aber in unserer Vorstellungsfähigkeit höchst beschränkt. Daß uns hier irgendwelche Grenzen gesteckt sind, liegt an der Endlichkeit der menschlichen Natur. Nur einem unendlichen Verstand können wir die Vorstellung aller Zahlen zumuten . . . Immerhin aber wären endliche Wesen denkbar, die es zur wirklichen Vorstellung der Millionen und Trillionen, ja der Lichtjahre der Astronomen brächten; ein Fall, der hinreichte, um der Ausbildung einer Arithmetik jeden praktischen Anlaß zu benehmen. Ist doch die ganze Arithmetik nichts anderes als eine Summe kunstmäßiger Mittel, die hier berührten wesentlichen Unvollkommenheiten unseres Intellekts zu überwinden" [4]).

Der Grund der Einteilung liegt also nicht in der Sache selbst, sondern in einer Unvollkommenheit unseres Intellekts, und schwindet im gleichen Augenblick, in dem sie, wie Husserl später sagt, einer „Idealisierung" unterzogen wird. Diese Beschränktheit unserer Vor-

---

[1]) Vgl. S. 51.
[2]) Philosophie der Arithmetik, 1. Bd., 1891, S. 215.
[3]) a. a. O. S. 214.
[4]) a. a. O. S. 213—14.

stellungsfähigkeit, an deren Überwindung immerhin gedacht werden kann, ist daher jener certa lex cuiusdam subiecti zu vergleichen, die Kant als über das Wesen eines Dinges entscheidend nicht gelten lassen will. Allerdings muß eine Zweideutigkeit der zentralen Begriffe ebenso wie bei Kant, so auch bei Husserl, festgestellt werden. Denn die „Endlichkeit der menschlichen Natur" kann und muß in diesem Zusammenhange bedeuten eine ontische Beschränktheit, da nur für diese eine Idealisierung sinnvoll ist. Sie wäre aber auch als die eigentliche Beschränktheit der menschlichen Natur auszulegen, d. h. als das Angewiesensein auf ein Seinsverständnis, und bietet daher zu Mißdeutungen Anlaß [5]).

Die entscheidenden Formulierungen über das Wesen des Endlichen aber finden sich naturgemäß bei Husserl dort, wo ihm gegenüber das Unendliche zur Abhebung gebracht wird: „Noch eine, besonders merkwürdige Erweiterung, . . . deren der Begriff der Menge oder Vielheit durch symbolische Mittel fähig ist, bleibt uns zu zergliedern übrig, welche den ursprünglichen Begriff in einer Weise extendiert, daß er nicht bloß die gewissermaßen zufälligen, sondern auch die dem Wesen aller Erkenntnis notwendigen Schranken überspringt, und damit im Grunde auch einen wesentlich neuen Inhalt gewinnt" [6]). Als notwendige Schranken der Erkenntnis kann man offenbar nur ihre Gebundenheit an gewisse Formen des Gegebenseins bezeichnen. Werden diese Schranken übersprungen, so muß ein Neuentwurf einer Gegebenheitsweise statthaben, der das Sein des Gegenstandes nur in völlig neuartiger Weise gründen kann. Es besteht also ein Hinweis auf die absolute Andersartigkeit endlicher und unendlicher Mengen durch ihre Zugehörigkeit zu je verschiedenen Weisen des Gegebenseins, die erst den Begriff einer unendlichen Menge „auch einen wesentlich neuen Inhalt" gewinnen läßt.

„Wir sprechen von Inbegriffen, Mengen, Vielheiten auch da, wo schon der Begriff ihrer eigentlichen Bildung . . . eine logische Unmöglichkeit einschließt. Wir sprechen von unendlichen Mengen . . . Der Gedanke, daß irgendeine faßbare Erweiterung unseres Erkenntnisvermögens dieses zu der wirklichen Vorstellung oder auch nur successiven Ausschöpfung solcher Mengen befähigen könnte, ist unausdenkbar. Hier hat selbst unsere Kraft der Idealisierung eine Schranke" [7]). Es wird also mit der Möglichkeit der Idealisierung

[5]) Die gleiche Bemerkung kann in Bezug auf den Begriff der Vollkommenheit gemacht werden. So weist Husserl in einer Anmerkung den Gaußschen Ausspruch „ὁ θεὸς ἀριθμητίζει" zurück, denn er würde nicht mit dem „Begriff eines unendlich vollkommenen Wesens" (a. a. O. S. 214) zusammenstimmen. Es bleibt aber prinzipiell unentschieden, was Husserl als unendliche Vollkommenheit begreift. Steht sie nur im Gegensatz zu der kurz vorher entwickelten ontischen Beschränktheit, so wäre der Gauß'sche Ausspruch in einem weiteren Sinne dennoch aufrechtzuerhalten.

[6]) a. a. O. S. 246.

[7]) a. a. O. S. 246/47.

ein Einteilungsprinzip der Mengen gewonnen, das endliche und unendliche Mengen wesensmäßig unterschieden sein läßt. Als endliche Mengen wären dann diejenigen Vielheitsvorstellungen zu bezeichnen, die eigentliche sind oder durch Idealisierung zu eigentlichen werden können; als unendliche dagegen solche, deren Gegebenheitsbereich über jede mögliche (ontische) Idealisierung noch hinausreicht [8]).

Kann also auch für die These, daß das Sein der endlichen Mengen in der Räumlichkeit gründet, bei Husserl keine Bestätigung gefunden werden [9]), so besteht doch darin mit ihm Übereinstimmung, daß unendliche Mengen von der wie immer verstandenen Konstitution der endlichen her prinzipiell nicht zu begreifen sind. Es bedarf vielmehr gerade einer Entschränkung der für endliche Mengen charakteristischen Gegebenheitsweise, um dem nahezukommen, von wo aus so etwas wie Unendlichkeit von Mengen einzig begreiflich ist. Es wird sich daher im Folgenden positiv darum handeln müssen, dieses „Von-wo-aus" eines Begriffes vom Sein der unendlichen Mengen in der Entgegensetzung zur Räumlichkeit als Zeitlichkeit zu entwickeln.

§ 8.

Die Zeitlichkeit einer unendlichen Menge.

Die für endliche Mengen ausgewiesenen allgemeinen Mengenbestimmungen behalten für eine unendliche Menge ihre Gültigkeit bei. Auch diese ist ein zusammengesetzter Gegenstand, dessen Teile isoliert abgeschlossen zueinander gehören. Doch wird der Sinn von Isoliertheit wie der von Abgeschlossenheit eine neue Auslegung erhalten müssen. Denn weder sind die Elemente von vornherein als gestellt noch als in gleichmäßiger Belichtetheit sich darbietend zu verstehen. Es gilt daher vor allem, den neuen Sinn zu ermessen, den die Zusammengehörigkeit der Teile für unendliche Mengen erhält.

Wenn die Verbundenheit der Elemente endlicher Mengen durch eine Weise des Gegebenseins bestimmt wurde, derart, daß sich das zur Menge Gehörige als in gleichmäßiger Helle befindlich anderem gegenüber horizonthaft abheben mußte, so entstände zunächst die Frage, ob und wie denn überhaupt etwas gegeben zu werden vermag, das als zusammengesetzt n i c h t seine Teile als belichtet dem

---

[8]) Auch eine Art ontologischer Idealisierung wäre zum mindesten konstruierbar, die unter Bevorzugung eines gewissen Sinnes von Sein die Endlichkeit der Erkenntnis aus ihrem Grunde aufzuheben versuchte, wiewohl nie völlig aufheben könnte. Doch würde ein solches Vorgehen dem Sinn ontologischer Forschung widerstreiten, die nicht auf wie immer motivierte Nivellierung, sondern auf die vollständige Freilegung transzendentaler Strukturen abzielt.

[9]) s. o. § 5.

erkennenden Zugriff entgegenhält. Es scheinen da, formal gesehen, überhaupt nur zwei Möglichkeiten zu bestehen: entweder der (Teil-) Gegenstand zeigt sich als belichteter oder er verbirgt sich als unbelichteter. Scheidet die erste Möglichkeit, wie unmittelbar zu sehen ist, für eine unendliche Menge aus, so würde sie, einzig auf die zweite Möglichkeit verwiesen, den Sinn eines Ganzen gegenstandsloser Teile erhalten, aber nicht das Thema einer ontischen Wissenschaft abgeben können.

Wäre es also verfehlt, Zugänglichkeit und Nichtzugänglichkeit mit Bezug auf das Gegebensein der Teile einer unendlichen Menge in einer Alternative anzusetzen, so muß, da keine weiteren Möglichkeiten zur Verfügung stehen, versucht werden, sie im Sinne eines ‚Sowohl-als-auch' auszulegen. Dann aber wäre an der Gegebenheit dieser Teile und damit der Menge selbst nicht nur eine einzige, sondern deren zwei Gegebenheitsweisen unmittelbar beteiligt, dem Wesen endlicher Mengen entgegengesetzt, für welches die Nichtgegebenheit nur negativ abgrenzende Funktion erhalten hatte. Es fragt sich jedoch, wie diese beiden Gegebenheiten [1]) den Wesensaufbau eines Gegenstandes konstituieren, ohne seine gegenständliche Einheit zu zerstören.

Betrifft das ‚Sowohl-als-auch' von Gegebenheit und Nichtgegebenheit die Elemente unendlicher Mengen selbst als die Art ihrer Zusammengehörigkeit determinierend, so muß nach einem formal-ontologischen Grundgesetz ohne weiteres die Möglichkeit ausgeschlossen werden, daß diese Teile im gleichen Sinne gegeben und nichtgegeben seien. Es liegt dagegen der Gedanke nahe, daß sich diese Doppelkonstitution in der Art der Gegebenheit auf die Elemente der Menge als verschiedene verteile und die einen als gegeben, die anderen von diesen unterschiedenen als nichtgegeben sich darstellen lasse. Eine Zweiklasseneinteilung sämtlicher Elemente würde die Folge dieser Verteilung sein müssen, indem das (als belichtet) Gegebene zu einer Klasse, das (als unbelichtet) Nichtgegebene zu einer anderen Klasse immer schon vereinigt wäre.

Prüft man diese Annahme einer durch eine Doppelung der Gegebenheitsweise a priori bestimmten Klasseneinteilung der Elemente unendlicher Mengen auf ihre phänomenale Ausweisbarkeit hin nach, so zeigt sich in der Tat, daß für jede Vergegenständlichung immer ein Teil der Elemente als unmittelbar zugänglich, ein anderer als nicht unmittelbar zugänglich verstanden wird, und daß eben diese Unterscheidung einen Grund zum Gegeneinanderstellen von zwei Klassen von Elementen abzugeben vermag. Man kann allerdings darauf hinweisen, daß sich unendliche Mengen vor Augen führen ließen, und doch kein einziges Element in seiner individuellen

[1]) Der Ausdruck ist, wenn auch meist nur für belichtete Gegebenheit gesetzt, in diesem Falle als auf Nichtgegebenheit ausgedehnt zu verstehen.

Eigenart unmittelbar zugänglich, also auch nur eine Klasse von Elementen festzustellen wäre. Dem würde aber entgegenzuhalten sein, daß, um diesen Tatbestand überhaupt zu bemerken, mit jener Zweiklasseneinteilung schon gerechnet sein muß. Die wesensmäßige Orientierung der Elemente auf diese Einteilung hin kann noch nichts über die Art des faktischen Vollzuges entscheiden. Jene ist ursprünglicher als jeder konkrete Gebrauch, der von ihr gemacht werden könnte.

Die beiden Klassen oder sie bestimmenden Gegebenheitsweisen stehen jedoch nach dem Vorangehenden noch völlig beziehungslos beieinander. Sie bilden gleichsam zwei Bereiche, die die Einheitlichkeit des Gegenstandes zu zerspalten drohen. Denn ebenso, wie die Gegebenheit als Zumalgegebenheit eine Art des Zusammengehörigseins konstituierte, bestimmt jetzt die Nichtgegebenheit eine weitere Art, die beide als solche einfach stehen gelassen, die Verbundenheit der Elemente als eine einzige aufheben und sie nicht als Teile eines Ganzen, sondern als zwei Ganzen je verschieden zugehörig erscheinen lassen — offenbar im Widerspruch mit den Phänomenen. Gleichwohl ergibt sich bereits positiv so viel, daß eine einheitliche Verbundenheit der Elemente unendlicher Mengen keine durchgehend gleichmäßige sein kann, sofern sie nur auf dem Grunde der entwickelten zweifachen Klassenverbundenheit sich zu erheben die Möglichkeit hätte.

Von vornherein aber muß die für die unendliche Ganzheit als solche zu fordernde Beziehung zwischen den beiden zunächst an ihr angetroffenen Arten der Zusammengehörigkeit als eine Verweisung angesetzt werden, die von der Nichtgegebenheit zur Gegebenheit zunächst einseitig läuft. Denn würde die Nichtgegebenheit keinerlei Beziehung zur Gegebenheit qua Belichtetheit aufweisen, so könnte sie am Aufbau der Gegenständlichkeit des in Frage stehenden Gegenstandes in positivem Sinne nicht mit beteiligt sein. Andererseits aber leuchtet ein, daß Zumalgegebenheit wenigstens nicht in dem gleichen einschließenden Sinne auf Nichtgegebenheit bezogen zu sein braucht.

Dieses Betroffensein der Nichtgegebenheit durch die Gegebenheit muß aber erstere selbst zu einer bestimmten Form des Gegebenseins werden lassen, und zwar vor allem in dem Sinn, daß ihr ein schon an der Zumalgegebenheit herausgestellter, als Horizonthaftigkeit bezeichneter Charakter in entsprechender Weise aneignet. Denn wenn die in Nichtgegebenheit stehenden (der Ausdruck gibt sich als Verlegenheit dem Sachverhalt gegenüber, der gerade jedes Stehen im Sinne einer Stellenbestimmtheit von sich weist) Elemente von schlechthin nichtgegebenen, also in jeder Hinsicht gegenstandslosen, durch eine Verweisung ihres Nichtgegebenseins auf Gegebenheit hin sich unterscheiden sollen, so liegt darin, daß sie eben als getrennt von diesen verstanden werden müssen. Das zu einer unendlichen

Menge als nichtgegeben Gehörige hat daher über ein Medium zu verfügen, welches dawider ist, daß sich diese Art von Nichtgegebenem mit anderem Nichtgegebenen vermenge. Ein solches Medium, welches ein Diesseits seiner als Innerhalb von . . ., ein Jenseits seiner als Außerhalb von . . . verstehen läßt, wurde „Horizont“ [2]) genannt. Jetzt ergibt sich: Die Verweisung der Nichtgegebenheit auf die Gegebenheit muß auch dem Nichtgegebenen einen Horizont verleihen, der eben die Bedingung der Möglichkeit auch für die Zusammengehörigkeit des Nichtgegebenen darstellt, im Grunde also auch dort schon mitverstanden sein mußte, wo von Klassenzugehörigkeit und Bereichhaftigkeit des Nichtgegebenen die Rede war. Den zwei Klassen der Einteilung entsprechen zwei Horizonte, die, das zu einer unendlichen Menge Zusammengeschlossene umfangend, wohl voneinander zu unterscheiden sind. Es soll aber der zuerst für endliche Mengen herausgestellte Horizont einer gleichmäßigen Zugänglichkeit Anwesenheits-Horizont heißen. Der Sinn des zweiten Horizontes und damit der übergreifenden Verbundenheit der Mengenteile steht hiernach zum Problem.

Ein Nichtgegebenes wird dann als auf Gegebenheit hin orientiert begriffen, wenn es als solches verstanden ist, dessen Nichtgegebensein in ein Gegebensein umschlagen kann. Schlechthin nichtgegeben oder gegenstandslos wird es aber genannt, wenn diese Umschlagemöglichkeit auf keine Weise besteht. So ist eine Mondrakete zwar nicht gegeben, aber nicht gegenstandslos; das Gleiche trifft zu für ein Haus, dessen Plan erst entworfen werden soll, oder für ein Lied, das zu singen der Künstler im Begriffe steht. In entsprechender Weise gibt es auch für die nichtgegebenen Elemente einer unendlichen Menge die Möglichkeit des Umschlags ihres Nichtgegebenseins in Gegebenheit. Als durch diese Möglichkeit ausgezeichnet verstanden, werden sie von anderem, das nicht durch die gleiche Möglichkeit bestimmt erscheint, getrennt. Der für diese Trennung maßgebende Horizont soll daher Möglichkeits-Horizont heißen.

Zunächst ist der Ausdruck Umschlag gegen jede ontische Mißdeutung zu sichern. Auf irgendwelche Zustandsänderungen des Seienden selbst, die seine individuelle Eigenart Wandlungen unterstellen, kann nicht abgezielt sein. Denn schon die übliche Redeweise von der Idealität der mathematischen Gegenstände beruft sich auf ihre Unveränderlichkeit im ontischen Sinne, eine Einsicht, an der — so trivial sie sein mag — gewiß nicht vorübergegangen sein soll. Diese Ständigkeit der individuellen Eigenart der zu behandelnden Gegenstände darf jedoch nicht dazu führen, das Phänomen des Umschlags in jedem Sinne von ihrer Konstitution fernzuhalten. Vielmehr werden auch und gerade die unendlichen Mengen a priori auf Umschlag hin orientiert verstanden, ein Umschlag jedoch, der weder

[2]) s. o. § 2.

das Seiende selbst (die Teile des Ganzen), noch gar das Sein dieses Seienden (die Ganzheit als solche) trifft, wohl aber einem ins-Sein-Kommen der (Teil-) Gegenstände und damit dem Wechsel zweier Gegebenheitsweisen gleichzusetzen ist, welche die Gegenständlichkeit erlangenden Teile zu durchlaufen haben. Dieser Umschlag der Form des Gegebenseins muß zwar schon immer dort verstanden sein, wo „wirkliche" Umschläge, etwa Bewegungen, zur Beobachtung gelangen; doch kann er, wie eben die Analyse zeigen soll, auch für Gegenstände bestimmend sein, die überhaupt nicht in der Möglichkeit ontischer Zustandsänderungen stehen. — Diese durch Umschlagsmöglichkeit konstituierte Weise des Nichtgegebenseins der Elemente unendlicher Mengen soll, sofern sie auf Zumalgegebenheit als eine dem Seienden „bevor"stehende Gegebenheitsweise verweist, Vorgegebenheit heißen.

Eine Orientierung an sinnlichen Gegebenheiten mag zur Verdeutlichung des fraglichen Phänomens beitragen. Wird in der Nacht mit einem Scheinwerfer die Gegend nach gewissen Dingen, etwa Flugzeugen, abgesucht, so erfährt der jeweils vom Scheinwerferlicht erfaßte Gegenstand weder eine Veränderung seiner ontischen Beschaffenheit, noch eine solche seiner Seinsstruktur. Gleichwohl ist nicht in Abrede zu stellen, daß ein Umschlag, der nicht auf den Scheinwerfer (als dessen Bewegungen) beschränkt bleibt, stattgefunden hat. Er trifft aber die Gegebenheitsweise des Gegenstandes, die eben derart umschlägt, daß er aus dem Dunkel der Nichtgegebenheit in die Helle der unmittelbaren Zugänglichkeit hineingerät.

War zu Anfang die Doppelkonstitution in der Gegebenheitsweise der Teile unendlicher Mengen im Sinne einer klassenbildenden ausschließenden Verteilung ausgelegt worden, so läßt die Kennzeichnung der Vorgegebenheit eine Korrektur notwendig werden, derzufolge die gleichen Teile als durch beide Gegebenheitsweisen konstituiert zu charakterisieren sind. Sofern sich diese jedoch gerade konträr gegenüberstehen, kann der Frage nach ihrer Verbundenheit nicht mehr, wie anfangs, ausgewichen, sondern muß der Bedingung nachgegangen werden, unter der sie nicht die Einheit des Gegenstandes zersprengen. Soll durch die Umschlagsorientierung eine solche Verbundenheit der beiden Gegebenheitsweisen geschaffen sein, so steht zum Problem, woraufhin das sich scheinbar schlechthin Ausschließende schon immer entworfen sein muß, um nicht einer gegenseitigen völligen Aufhebung zu verfallen.

Jene neue Form des Gegebenseins, welche diese durch die Einheit des Gegenstandes zu fordernde Verbundenheit ermöglicht, ist die Nacheinandergegebenheit. Sie läßt die beiden sich entgegenstehenden Gegebenheitsweisen in Eins, und zwar nacheinander, einen Gegenstand bestimmen, ihr gegenseitiges Sichausschließen derart beschränkend. Mit der Umschlagsmöglichkeit der Vorgegebenheit muß also bereits das Nacheinander der beiden Gegeben-

heitsweisen verstanden sein. Diese neue Gegebenheitsform ist daher den erstgenannten in dem Sinne übergeordnet, daß sie erst ihre ursprüngliche Einheit ersichtlich werden läßt.

Das Problem der Art der Zusammengehörigkeit der Elemente unendlicher Mengen hätte also bisher zu dem Ergebnis einer zweifachen horizontbestimmten Klassenzugehörigkeit geführt, deren Zerspaltenheit durch eine übergeordnete Klassenzusammengehörigkeit, die durch die Form des Nacheinandergegebenseins ermöglicht ist, aufgehoben wird. Und zwar steht es jedem Element der durch den Möglichkeitshorizont bestimmten Klasse in einem gewissen (freilich noch vieldeutigen) Sinne bevor, nacheinander durch Umschlag der Gegebenheitsweise dieser u n d der anderen Klasse innezuwohnen. Bezieht sich aber dieser Umschlag in seiner Möglichkeit nicht auf ein einziges Element, sondern auf eine ganze Klasse ihrer und erfolgt er nicht in eine beliebige Gegebenheit, sondern in die als Zumalgegebenheit charakterisierte hinein, so ist den Bedingungen nachzugehen, denen er in dieser Funktion selbst unterstehen muß, um einen neuen, wiewohl auf die früheren zurückweisenden und in ihnen gründenden Seinscharakter unendlicher Mengen zur Darlegung zu bringen.

Prüft man die Frage, in welchem Sinne die horizontbestimmte Nichtgegebenheit des Verschiedenen in Gegebenheit umzuschlagen vermag, wie also das zunächst durch Vorgegebenheit verbundene Verschiedene in eine neue Art des Verbundenseins eingehen kann, so ist es eine Gleichmäßigkeit des Umschlags, die sich als nächste für das Verschiedene bestehende Möglichkeit nahelegt. Der gleichmäßigen Gegebenheit qua Zumalgegebenheit, in die der Umschlag erfolgt, würde also dann ein Gleichmaß des Umschlags selbst entsprechen, demzufolge keines der Verschiedenen mit Bezug auf den Umschlag seiner Gegebenheitsweise gegeneinander b e v o r zugt oder b e n a c h teiligt wäre. Eine solche gleichmäßige Gegebenheit des Umschlags des Verschiedenen aus Nichtgegebenheit in Zumalgegebenheit aber wird Z u g l e i c h g e g e b e n h e i t genannt. Das Zugleichsein wäre hiernach mit dem Gleichmäßig-Umgeschlagensein zu identifizieren, wie es im Bilde für zwei Läufer zutrifft, die gemeinsam durchs Ziel gehen, oder für die Gegenstände, die in eins vom Scheinwerferlicht erfaßt werden.

Offenbar aber kann die Zugleichgegebenheit nicht die Form des Umschlags bestimmen, in dessen Möglichkeit das klassenumgrenzende Nichtgegebensein von Teilen unendlicher Mengen immer schon steht. Denn andernfalls könnte die eine Klasse von Elementen als solche in die andere übergeführt, d. h. aber eine unendliche Menge als endliche begriffen werden. Wenn aber der Umschlag des horizonthaft gegebenen Verschiedenen nicht gleichmäßig für dieses Verschiedene erfolgt, so nur ungleichmäßig, da ein Drittes zwischen Gleichmäßigkeit und Ungleichmäßigkeit nicht vorliegt. Das ungleichmäßige Gegebensein des Umschlags einer Gegebenheitsweise des

Verschiedenen aber heißt Succession. Die durch den Möglichkeitshorizont umgrenzten Elemente unendlicher Mengen geraten wesensmäßig nur successive in den Anwesenheitshorizont hinein. In der Succession findet man also eine Form der Verbundenheit, durch welche das Zusammengehörige der einen Gegebenheitsweise zusammengeschlossen wird, ohne daß in diesem Zusammenschluß die eine von beiden sich aufzugeben braucht.

Es haben sich hiernach im Verlaufe der Betrachtung vier Formen des Gegebenseins, die aufs engste miteinander verflochten sind, als den Wesensbau einer unendlichen Menge, über welchen eben die Art der Zusammengehörigkeit der Teile entscheidet, bedingend herausgestellt. Sämtlich stimmen sie darin überein, daß sie die Gegebenheit bezw. Nichtgegebenheit (Belichtetheit — Unbelichtetheit) eines Gegenstandes unmittelbar oder vermittelnd betreffen. Die Zumalgegebenheit ließ durch das Gleichmaß ihrer Gegebenheit (horizonthafte Gestelltheit) das Verschiedene Eines (ein Ganzes) sein; das Nacheinander ermöglichte durch die Ungleichmäßigkeit seines Gegebenseins die Verschiedenheit des Einen. Beide Gegebenheitsweisen begründen also je anders eine μέθεξις der formal-ontologischen Kategorien. Succession dagegen bestimmt formal gesehen eine Bedingung der Verbundenheit des ungleichmäßig Verschiedenen bezw. der Verschiedenheit des gleichmäßig Verbundenen, steht also zu den erstgenannten Formen in einem Fundierungsverhältnis.

Die Art der Zusammengehörigkeit der Elemente unendlicher Mengen ist — so ergibt sich vorläufig abschließend — eine fundierte. Zwei Weisen des Gegebenseins bestimmen zunächst durch ihre je verschiedene Horizonthaftigkeit zwei verschiedene Arten des Zusammengehörens, mit deren Beziehung aufeinander erst die eigentliche Verbundenheit des fraglichen Ganzen problematisch wurde. Sie stellte sich dar als die ursprüngliche Einheit von Vorgegebenheit und Zumalgegebenheit, auf die Phänomene des Nacheinander und der Succession gegründet. Diese Einheit von Vorgegebenheit und Zumalgegebenheit, die für jede Vergegenständlichung unendlicher Mengen schon immer verstanden sein muß, macht dasjenige aus, was ihre Zeitlichkeit genannt werden soll. Mit ihr tritt das maßgebende Konstitutiv des Unendlichseins im Gegensatz zum Endlichsein hervor.

Bringt man dieses Ergebnis, wie es für eine weiterdringende Untersuchung Aufgabe wäre, schon allein im Interesse einer gewissen terminologischen Rechtfertigung, mit der Zeitbestimmtheit des Seienden in Zusammenhang, an welchem Zeit und Zeitlichkeit zunächst verstanden zu sein scheint, nämlich des Vorhandenen, so springt vor allem ein formal sich gebender Unterschied in die Augen, der Aufklärung erheischt. Als Modi der Zeitlichkeit ergab die Analyse nur deren zwei, während die zunächst verstandene Zeitbestimmtheit eine dreifache Gliederung in Zukunft, Gegenwart und Vergan-

genheit ganz selbstverständlich aufweist. Würde man also auch eine gewisse Parallelität zwischen Zumalgegebenheit und Gegenwart, Vorgegebenheit und Zukunft zuzugeben bereit sein, so muß es doch aufs äußerste befremden, daß dem Modus der Vergangenheit überhaupt kein Platz innerhalb der zeitlichen Struktur des Unendlichen entspricht. Entweder also hat sich die Argumentation ein wesentliches Versäumnis zuschulden kommen lassen, oder sie muß begründen können, woran es liegt, daß die Zeitlichkeit des mathematisch Unendlichen das Zweigeteiltsein nicht nur zuläßt, sondern fordert.

Es wäre zu überlegen, was es denn zu bedeuten hätte, wenn so etwas wie Vergangenheit die Zeitlichkeit der unendlichen Mengen mit konstituierte. Auch Vergangenheit würde, ebenso wie die entwickelte Vorgegebenheit, eine Form des Nichtgegebenseins eines (Teil-) Gegenstandes zum Ausdruck bringen, und zwar eine solche, in der befindlich „nicht mehr" die Möglichkeit offen steht, in Gegebenheit umzuschlagen. Nur solches aber kann vergangen sein, das seiner Natur nach durch Vergänglichkeit bestimmt ist. Vergänglich ist Seiendes, das nicht nur seiner Gegebenheitsweise, sondern auch seinem ontischen Zustande nach Umschläge erfährt. Seiendes jedoch, das im Sinne ontischer Zustandsänderungen weder vergehen noch entstehen kann, muß schon immer als solches verstanden sein, das in gar keiner Weise von so etwas wie Vergangenheit angegangen wird.

Wenn aber der Ausschluß eines der Vergangenheit entsprechenden Modus der Zeitlichkeit von den bereits entwickelten zeitlichen Strukturen her zu fordern ist, so könnte man noch von einer anderen Seite her dem Gedanken nahetreten, daß in einer gleichsam abgeschwächten Form doch für das behandelte Problem noch ein dritter Modus relevant wäre. Es ist nämlich bisher überhaupt nicht die Rede gewesen von einem Umschlag, der nicht von der Vorgegebenheit in Zumalgegebenheit, sondern umgekehrt von der Zumalgegebenheit in Vorgegebenheit zu erfolgen vermöchte. Man hätte dann unter Berücksichtigung dieser Möglichkeit zwischen zwei Arten der Vorgegebenheit zu unterscheiden, je nachdem, ob der mögliche Umschlag in Gegebenheit als „Wieder"-Umschlag oder als Neu-Umschlag zu verstehen sei, und jene Art der Vorgegebenheit, die für das in ihr Stehende nicht nur in Zumalgegebenheit umschlagen kann, sondern immer schon aus ihr umgeschlagen ist, könnte man von der eigentlichen Vorgegebenheit trennen, und als der Vergangenheit entsprechende, auch für unendliche Mengen konstitutive Form des Nichtgegebenseins bezeichnen.

Nun unterliegt es zwar keinem Zweifel, daß für die Vergegenständlichung unendlicher Mengen wirklich zwischen diesen beiden Arten der Vorgegebenheit, einer eigentlichen und der Wieder-Vorgegebenheit unterschieden wird. Aus welchen Motiven aber auch immer diese Unterscheidung gefordert werden mag — in der Tat sind gewisse schon innerhalb der Endlichkeitsproblematik gesichtete

ontische Unzulänglichkeiten für diese Forderung maßgebend [1]) — in jedem Falle kann sie als das Wesen unendlicher Mengen konstituierend nicht herangezogen werden. Vielmehr kommt, wie sich noch ergeben wird, der Zumalgegebenheit gerade ein Charakter zu, der die Hinfälligkeit dieser Unterscheidung als einer wesensmäßig geforderten offensichtlich macht.

Allgemein bestätigt sich also die immer wieder ausgesprochene Erkenntnis, daß für die hier problematischen Gegenstände, als zum sogenannten idealen Bereich gehörig, eine Art von Unzeitlichkeit in Anspruch genommen werden muß. Dennoch geht es nicht an, diese mit einer absoluten Außerzeitlichkeit zu identifizieren, als ob zeitliche Strukturen für diesen Bereich in gar keiner Weise in Frage kämen. Begreift man vielmehr die Unzeitlichkeit als bloße Vergangenheitslosigkeit, so ergibt sich, daß besagte Idealität den behandelten Phänomenen gerade nur im Blick auf ihre spezifische Zeitlichkeit zugesprochen werden könnte. Allerdings würde diese erst in der Abgrenzung gegen die übrigen Arten der Zeitlichkeit, insbesondere in der Bestimmung ihrer Abhängigkeit von der „ursprünglichen" Zeitlichkeit, die das Dasein konstituiert, — also in der Einordnung in die in „Sein und Zeit" entwickelte Grundproblematik — volle Klarheit erfahren. Es können aber mit Rücksicht auf das besondere Ziel der Untersuchungen die gegebenen Entwicklungen vielleicht genügen, die vor allem darauf ausgehen, eine vorläufige Grundlage zu schaffen für das ontologische Verständnis dessen, was man seit Cantor Verschiedenmächtigkeit im Bereich des Unendlichen zu nennen pflegt.

§ 9.

Die Abzählbarkeit der unendlichen Mengen.

Wenn im Vorangehenden mit den allgemeinen Strukturen einer Zeitlichkeit die Wesensmöglichkeit von so etwas wie einer unendlichen Menge auseinandergelegt wurde, so waren die Entwicklungen doch noch entfernt davon, die Bedingungen für den besonderen gegenständlichen Sinn hervortreten zu lassen, der für die wissenschaftliche Erforschung der unendlichen Mengen maßgebend ist. Regionalontologischer Untersuchung aber kann es nicht so sehr darauf ankommen, die Möglichkeit nur des Gedankens von gewissen Gegenständen überhaupt zu erörtern, als vielmehr den Bedingungen, die das Ausmaß und die Grenzen ontischer Entdeckungen bestimmen, auf den Grund zu gehen. Diese Bedingungsforschung aber untersteht notwendig einer doppelten Orientierung, auf deren Charakter zu achten ist, soll für die weiteren Analysen methodische Durchsichtigkeit erzielt werden.

Eine Wissenschaft hat es, ganz allgemein genommen, auf vollständige Bestimmung gewisser ihr vorgegebener Gegenstände ab-

[1]) vgl. oben S. 50.

gesehen. Bestimmung eines Gegenstandes aber heißt Kennzeichnung seiner individuellen Eigenart. Diese erwächst aus einer Vereinigung differenzierender Merkmale, durch welche sich der Gegenstand anderen Gegenständen gegenüber zur Abhebung bringen läßt. Abgrenzung des Verschiedenen aber setzt voraus Hinblicknahme auf ein gemeinsames Wesen, das von sich aus erst die Möglichkeit zu Differenzierungen bietet. Diese allgemeinen Wesenheiten, die von den positiven Wissenschaften zwar auseinandergehalten und benannt, dem Gange der Forschung nach aber vorausgesetzt werden, bilden das ausdrückliche Thema einer Ontologie.

Die Entfaltung eines speziellen Objektes der Wissenschaft nun hat in einer ontologischen und in einer ontischen Blickrichtung zu erfolgen, um ihrer Aufgabe wirklich gerecht zu werden. Sie kann zunächst nur vollführt werden in der Gegenüberstellung zu anderen fest umrissenen Wesenheiten, die mit ihr zusammen, wenigstens in einem gewissen Ausmaß, zur Seinsentwicklung gelangen. Die ontologische Analyse muß aber zugleich in Ergänzung ihrer ersten Tendenz auf die ontischen Entdeckungen der positiven Wissenschaften selbst gerichtet sein, um immer erneut zu überprüfen, ob das herausgestellte Wesen in der Tat geeignet ist, den Grund der Möglichkeit ontisch gegenständlicher Eigenarten und Verschiedenheiten auch abzugeben. Eine solche Prüfung wird und muß in vielen Fällen zu dem Ergebnis führen, daß das zuerst entwickelte Sein noch zu allgemein, d. h. strukturell noch zu wenig determiniert ist, um der gestellten Forderung bereits Genüge zu tun. Um jedoch zu der notwendigen tieferdringenden Wesensentfaltung zu gelangen, wird die Einnahme einer gleichsam veränderten ontologischen Position notwendig. Die zunächst nämlich in der Gegenüberstellung im Blick gehaltenen Wesenheiten müssen fallen gelassen werden, weil die mögliche Abgrenzung gegen sie bereits ausgeschöpft wurde und von ihnen her die Enthüllung neu determinierender Seinsstrukturen nicht zu erwarten ist. Der Weg ontologischer Koordinierung muß verlassen, statt dessen der Weg ontologischer Subordinierung beschritten und versucht werden, das zuerst entwickelte allgemeine Wesen als Gattungsbegriff anzusetzen, dem verschiedene Wesensarten untergeordnet werden und in dieser Unterordnung eindringender das Wesen eines bestimmten Gegenstandes zur Darstellung bringen können.

Ontologische Forschung hat sich überall und ständig koordinierend und subordinierend zugleich zu verhalten und dort, wo im Blick auf die ontische Eigenart gewisser Gegenstände die begonnene Koordinierung nicht ausreicht, zur ausdrücklichen Subordinierung zu schreiten. Letztere ist jeweils, falls die Ontologie auf Vollständigkeit abzielt, so weit zu treiben, als mögliche Wesensdifferenzierungen nur in Frage kommen.

Die vorangehende Analyse des Seins der unendlichen Mengen war ausschließlich im Blick auf Endlichkeit geführt und die das Sein

konstituierende Zeitlichkeit wesentlich als Nicht-Räumlichkeit begriffen worden. Es fragt sich jedoch, ob mit dieser Gegenüberstellung bereits eine derart vollständige Ausmessung des Phänomens der Unendlichkeit erreicht wurde, daß von ihr aus die ontische Vielfalt der Erscheinungen dieses Wesens ihrer Möglichkeit nach verständlich wird. Es gilt also zu überlegen, ob man sich mit dem Stand der Untersuchung prinzipiell zu begnügen habe und nur für den Ausbau gewisser erst angedeuteter Seinscharaktere zu sorgen hätte, oder ob die Mannigfaltigkeit der Entdeckungen im Bereich des Unendlichen eine subordinierende Neueinstellung notwendig macht. Die Entscheidung dieser Frage, der allerdings eine Vertiefung der begonnenen Analyse wird vorangehen müssen, erfordert zunächst eine Neuorientierung am ontischen Tatbestande selbst.

Es sind im wesentlichen zwei Mengencharaktere, im Blick auf die unendliche, aber auch endliche Mengen zur Abgrenzung gelangen und deren Differenzierungsmöglichkeiten für den Bereich des Unendlichen von Cantor erstmalig entdeckt wurden: die Charaktere der Größe und Ordnung. Eine ihrer speziellen Größe und Ordnung nach bestimmte unendliche Menge kann als individuell umgrenzt gelten. Ontologischerseits entsteht daher die Aufgabe, diese Größen- und Ordnungsbestimmtheit bezw. -verschiedenheit der unendlichen Mengen zu begründen. Ihr Sein muß als ein solches begriffen werden, das von sich aus die Möglichkeit zu Größen- und Ordnungsdifferenzierungen in sich birgt.

Gibt aber der Größencharakter jene Grundbestimmung der unendlichen Mengen her, die für den Aufbau der Disziplin der Mengenlehre schlechthin tragende Funktion erhält und deren Entwicklung daher auch für eine Theorie der Ordnung Bedingung ist, so hat das wiewohl gleich zentrale Problem der möglichen Ordnungsbeziehungen unendlicher Mengen vor dem der möglichen Größenbestimmtheit zunächst zurückzutreten. Die Vielfalt dessen, was sich im Bereich des Unendlichen an Erscheinungen darbietet, erfährt hiernach für die erste ontologische Orientierung eine wesentliche Einschränkung. Übrig bleibt nur die Mannigfaltigkeit der Bestimmungen, die unter den von Cantor geprägten Oberbegriff der Mächtigkeit fallen. Denn durch die Mächtigkeit wird dasjenige festgelegt, was man die Größe einer unendlichen Menge nennen kann.

Entsprechend dieser Einschränkung des ontischen Materials kann an die vorgenommene Herausstellung des Phänomens der Zeitlichkeit mit folgender konkreter Frage herangegangen werden: Ist die für das Sein einer unendlichen Menge als konstitutiv entwickelte Zeitlichkeit von sich aus geeignet, so etwas wie Verschiedenmächtigkeit der unendlichen Mengen der Möglichkeit nach verständlich zu machen? Wird diese Frage bejaht, so haben die Untersuchungen ihr vorläufiges Ende erreicht. Ist sie jedoch zu verneinen, so wird die Beschreitung des ontologischen Subordinierungsweges erforderlich. (§ 10.)

Es gilt also, diejenigen Seinscharaktere der herausgestellten Zeitlichkeit zu enthüllen, von denen aus allein, wenn überhaupt, die Möglichkeit von Verschiedenmächtigkeiten verständlich zu machen wäre. Wie aber soll man solche Charaktere überhaupt nur ausfindig machen, wenn es gar keine gibt, die besagte Eignung besitzen? Ein richtunggebender Hinweis muß daher gefordert werden, der die hypothetische Ansetzung einer geeigneten Seinsbestimmung leitet. Ein solcher Hinweis aber vermag aus der zuerst analysierten Endlichkeit von Mengen zu erwachsen. Man könnte nämlich daran denken, die gleiche Frage, die man an die entwickelte Zeitlichkeit von Mengen gestellt hat, zunächst einmal der Räumlichkeit, für welche die Verhältnisse ontologisch offenbar einfacher liegen, vorzulegen, nämlich zu fragen, ob und von wo aus sie imstande ist, die Größenunterschiedenheit endlicher Mengen ontologisch zu begründen. Es ist zu erwarten, daß bei der Gemeinsamkeit gewisser Seinsstrukturen des Endlichen und Unendlichen die Lösung der zuerst für die Endlichkeit in Angriff genommenen Frage dem eigentlichen Problem die notwendigen Richtlinien schafft.

Ohne weiteres scheint allerdings auch die Zumalgegebenheit nicht einen Grund für die Größenbestimmtheit der endlichen Mengen hergeben zu wollen; freilich nur so lange, als man sie, wie es bisher geschah, im Sinne einer „bloßen" Räumlichkeit auslegt, von dieser also die Strukturen der Zeitlichkeit, auf die sie letztlich gegründet ist, ausdrücklich fernhält. Begreift man jedoch die Zumalgegebenheit von jener Verbundenheit her, in der sie, als mit der Vorgegebenheit stehend, sich auch für unendliche Mengen als konstitutiv erweist, wird die an sie gestellte Frage ihre, wenn auch nur vorläufige, da einzig zum Hinweis dienende, Beantwortung finden können.

Die für die Unendlichkeit einer Menge charakteristische Beziehung zwischen Vorgegebenheit und Zumalgegebenheit war als eine einseitige Verweisung bestimmt worden [1]), die von der Nichtgegebenheit zur Gegebenheit läuft. Die Behauptung von der Einseitigkeit dieser Beziehung aber bedarf der Korrektur. Denn wenn die Nichtgegebenheit in Gegebenheit, die immer eine Schon-Gegebenheit des Vorliegenden ist, soll umschlagen können, so muß das Vorliegende seiner Gegebenheitsweise nach aufnahmebereit sein für Nichtvorliegendes, das durch Umschlag in seinen Horizont hineintritt. Darin liegt, daß der Horizont des Zumalgegebenen von vornherein als veränderlich zu verstehen ist, veränderlich nämlich durch Horizontwechsel des zunächst Nichtgegebenen. Diese Art Horizontveränderung aber nennt man Horizonterweiterung. Die Umschlagsmöglichkeit der Vorgegebenheit setzt also eine Erweiterungsfähigkeit des Anwesenheitshorizontes, d. h. einen Charakter der Horizonthaftigkeit des Zumalgegebenen immer schon voraus, der das Gegebene nicht nur über-

---

[1]) s. o. § 8.

haupt mit einem Horizont versehen sein, sondern diesen Horizont unmittelbar in die Weite des Nichtgegebenen hineinorientiert sein läßt. Es soll daher unter Berücksichtigung dieser Eigenart von der Horizontoffenheit der Zumalgegebenheit gesprochen werden. Es ist ohne weiteres deutlich, daß diese Horizontoffenheit in keiner Weise mehr als bloß räumliche Struktur begriffen werden kann, — ebensowenig wie es für die sogenannte Unendlichkeit des Raumes, auch und gerade im transzendentalen Sinne, zutreffend wäre.

Eine ursprünglich an Mengen entdeckte, für jede Größenbestimmung maßgebende Eigenschaft ist ihre Vermehrbarkeit. Eine Menge könnte aber nicht als vermehrbar befunden werden, wenn nicht ihr jeweiliger Horizont schon immer als erweiterungsfähig, d. h. die sie bestimmende Horizonthaftigkeit als Horizontoffenheit verstanden wäre. Diese ist also in der Tat geeignet, den Grund der Möglichkeit von so etwas wie Größenbestimmtheit der endlichen Mengen begreiflich zu machen [2]).

Wenn die Eigenart des durch die Räumlichkeit einer Menge bestimmten Anwesenheitshorizontes für eine ontologische Begründung der Größenverschiedenheit endlicher Mengen herangezogen werden muß, so liegt der Analogieschluß nahe, die Horizonthaftigkeit der für die Zeitlichkeit charakteristischen Vorgegebenheit als möglichen Grund der Verschiedenheit von Mächtigkeiten in Ansatz zu bringen. Es wird daher zunächst Aufgabe sein, den Möglichkeitshorizont der durch Vorgegebenheit bestimmten Teile einer unendlichen Menge soweit zu kennzeichnen, daß seine der des Anwesenheitshorizontes analoge Offenheit ans Licht tritt, um sodann die aufgeworfene Frage zu beantworten und zu sehen, ob und in welchem Sinne die entwickelten Strukturen für eine Begründung der Größenverschiedenheit auch unendlicher Mengen in Anspruch zu nehmen sind.

Zunächst ist es durchaus nicht selbstverständlich, daß der die Abgeschlossenheit unendlicher Mengen bestimmende Möglichkeitshorizont wesensmäßig ein echter Horizont in dem Sinne ist, daß er gegen anderes nicht durch ihn Vereinigte wiewohl nicht Nichtige abzugren-

---

[2]) Auf eine in die Philosophie der Arithmetik in regionaler, zum Problem der transzendentalen Deduktion der Quantitätskategorien in metaphysischer Orientierung gehörige Analyse von Größe und Zahl muß naturgemäß verzichtet werden. Diese Einschränkung braucht die Untersuchung methodisch nicht zu gefährden; besteht doch nicht die Aufgabe, zu sagen, was Mächtigkeit oder Zahl oder Größe, sondern wie so etwas wie Verschiedenmächtigkeit und in welchem Ausmaße es möglich sei. Daß im übrigen für eine vorläufige Fassung des Begriffes der Mengengröße die Stellenmannigfaltigkeit, auf die hin eine Menge orientiert ist, bestimmende Funktion erhält, dürfte bereits einleuchten. So kann auch die im ersten Teil erfolgte Ansetzung der Größe oder Zahl einer Menge als Differenzierungsspielraum zum mindesten als brauchbare Problemvorgabe angesehen werden. Über eine mögliche ontologische Fassung des Begriffs der Mächtigkeit dagegen werden erst die nachfolgenden Untersuchungen eine Entscheidung treffen.

zen vermag. Es könnte wenigstens daran gedacht werden, daß er ein Ganzes von der Form einer Kantischen Idee bilde und alles Seiende enthaltend prinzipiell nicht in der Lage sei, noch gegen etwas abzugrenzen. Befragt man allerdings die konkreten Phänomene selbst, so scheidet diese Auslegung des Möglichkeitshorizontes alsbald aus. Niemandem wird es z. B. einfallen, in das unendliche Ganze der natürlichen Zahlen vorhandene Dinge hineinmengen zu wollen; denn das zur unendlichen Menge Gehörige wird seiner Seinsart nach als gebunden und als von andersartigem Seienden schlechthin getrennt verstanden. Was aber entscheidet über die Horizonthaftigkeit des Möglichkeitshorizontes und in welchem Sinne muß auch ihm die Offenheit zugesprochen werden?

Die den Horizont bildende Möglichkeit, die das Nichtgegebene vereinigte, wurde als Umschlagsmöglichkeit charakterisiert. Sie erhält allgemein den Sinn von Abhängigkeit. Der Umschlag dessen, was in der Möglichkeit steht, geschieht nicht ohne weiteres, sondern hängt von etwas ab; nämlich vom Ingangkommen eines Geschehens, das den Umschlag mit sich führt. Das diesen Umschlag mit sich führende Geschehen kann prinzipiell auf zweierlei Art vor sich gehen. Entweder der Umschlag geschieht, wie man sagt, von ungefähr, aufs geratewohl, in dem Sinne, daß sich „vor" dem Umschlag, also von vornherein, nichts, weder über die Natur des Gegenstandes, der seinen Horizont wechselt, noch über die Art und Weise, in welcher der Umschlag vor sich geht, festlegen läßt. Oder aber der Umschlag läßt eine Vorausbestimmung in dieser zweifachen Hinsicht zu. Im ersten Falle soll von einem regel- oder planlosen, im zweiten von einem regel- oder planmäßigen Umschlag gesprochen werden.

Allein das Vorliegen, also Gegebensein, eines den Umschlag determinierenden Planes ist es, was das Abschließendsein auch des Möglichkeitshorizontes zu verbürgen vermag. Denn dieses soll gerade eine Vorausbestimmung zum mindesten über Natur und Seinsart des in der Möglichkeit Stehenden gestatten. Jede Vorausbestimmung aber wird gegenstandslos, wenn der mögliche Umschlag nur als völlig planlos zu verstehen ist. Umschlagsmöglichkeit als Konstitutivum der Vorgegebenheit heißt hiernach Abhängigkeit des Umschlags vom In-Gang-Kommen eines ihn planmäßig führenden Geschehens.

Ist aber diese Planbestimmtheit eine in jeder Hinsicht vollständige, sodaß die Art und Weise des Umschlags im Vollzuge selbst nicht mehr der geringsten Beliebigkeit untersteht, so übt der gegebene Plan, bezw. der, welcher über ihn zu verfügen weiß, eine Herrschaft über den Umschlag aus. Die Möglichkeit eines Umschlags, die auf einen solchen gegründet ist, soll Mächtigkeit[3]) heißen; der

[3]) Der mengentheoretische Centralbegriff hat mit dieser ontologischen Kennzeichnung eines Größenhorizontes unmittelbar nichts zu tun. Der mittelbare Zusammenhang wird sich herausstellen.

durch sie bestimmte Horizont Mächtigkeitshorizont; diejenige Vorgegebenheit schließlich, deren Umschlag in Gegebenheit durch eine einfache Abhängigkeit qua Mächtigkeit zu charakterisieren ist, primäre Vorgegebenheit.

Jede Horizonthaftigkeit bestimmt sich allgemein als Abgegrenztheit einer Gegebenheit gegen eine Nichtgegebenheit. Den Bezug auf Gegebenheit erhält die Vorgegebenheit als in der charakterisierten Weise in der Mächtigkeit des Umschlags stehend mit dem Vorliegen eines Planes. Diese horizonthafte Plangegebenheit schließt aber in sich die Orientierung auf eine neue Form des Nichtgegebenseins, d. h. wieder Vorgegebenheit.

Allerdings erhebt sich gegen die Möglichkeit des Neuentwurfes einer von der gekennzeichneten primären unterschiedenen Vorgegebenheit zugleich ein Einwand. Es wurde die durch die räumliche Konstitution von vornherein beschränkte Offenheit des Anwesenheitshorizontes durch den Möglichkeitshorizont entschränkt, indem mit der Zeitlichkeit eine Weite des Gegebenheitsfeldes erreicht wurde, von der die Zumalgegebenheit wesensmäßig ausgeschlossen bleibt. Dieser Entschränkungsfunktion der Zeitlichkeit scheint aber ihre eigene Horizonthaftigkeit, also Beschränktheit, zu widersprechen. Demgegenüber aber wäre zu betonen, daß nicht jede Entschränkung schon vollständig zu sein braucht, vielmehr das Entschränkende selbst noch Schranken bilden, das Entschränkte Schranken unterstehen kann, wenn auch jeweils anderen als die, von denen es befreit und befreit wurde.

Mit der Horizonthaftigkeit der primären Vorgegebenheit kann und muß also schon eine weitere Form des Nichtgegebenseins verstanden sein, deren der gekennzeichneten Vorgegebenheit Gegenüberstehen erst das Mediumhafte auch des Mächtigkeitshorizontes ermöglicht. Auch diese neue Form des Nichtgegebenseins muß, um nicht der Nichtigkeit gleichgesetzt zu werden, durch Umschlagsmöglichkeit konstituiert sein, wiewohl diese Möglichkeit nicht mehr Mächtigkeit sein kann. In vorläufig nur negativer Abgrenzung aber ist sie von der primären Vorgegebenheit dadurch zu unterscheiden, daß der den Umschlag determinierende Plan nicht gegeben vorliegt, also unbelichtet bleibt.

Nach diesen Überlegungen aber wird die Offenheit des Mächtigkeitshorizontes bezw. die Horizontoffenheit der Zeitlichkeit in der ihr eigenen Struktur durchsichtig. In Analogie zu den für die Offenheit des Anwesenheitshorizontes gültigen Verhältnissen muß auch die primäre Vorgegebenheit als in dem Sinne auf jene neue Art des Nichtgegebenseins bezogen verstanden werden, daß das durch sie Bestimmte wesensmäßig als aufnahmebereit für das in ihren Horizont Hineintretende, d. h. dieser selbst als erweiterungsfähig sich darstellt. Diese a priori verstandene Horizontoffenheit der für unendliche Mengen konstitutiven Zeitlichkeit wird aber bedingt durch

die Horizontoffenheit der Plangegebenheit des Umschlags, die selbst, wie die Endlichkeit, auf Anwesenheit hin zu begreifen ist. So enthüllt sich die Vorgegebenheit als Weise des Nichtgegebenseins zugleich als echte Gegebenheit.

Es gelang also, in Analogie zu Seinsbedingungen des Endlichen jenen Grund zur Enthüllung zu bringen, der als so etwas wie Verschiedenmächtigkeit ontologisch ermöglichend aus der Struktur der Zeitlichkeit heraus zur Ansetzung einzig in Betracht käme. Von ihm aus muß daher die Anfangs gestellte konkrete Frage positiv oder negativ zu entscheiden sein.

Zunächst ergibt sich aus der Horizontoffenheit der primären Vorgegebenheit allerdings nur die Möglichkeit einer Planbestimmtheit bezw. Planunterschiedenheit der unendlichen Mengen. Man sieht aber sofort, daß diese Planunterschiedenheit auch die Möglichkeit zu so etwas wie einer Größenverschiedenheit unendlicher Mengen in sich birgt. Denn von einander unterschiedene Pläne könnten im Teilmengenverhältnis zu einander stehen, eingeschlossen oder umschließend sein. Es wäre durchaus als sinnvoll anzusehen, wenn eine Menge, deren Umschlagsplan den einer anderen umschließt, als größer als jene bezeichnet würde. Die entwickelte Seinsstruktur gibt also in der Tat den Grund der Möglichkeit her, so etwas wie Größenverhältnisse im Gebiet des Unendlichen zu entdecken. Z. B. wäre es ontologisch begründet, würde man in der Mengenlehre die Menge der algebraischen Zahlen größer als die der rationalen, größer als die der ganzen, größer als die der geraden Zahlen nennen. Es wäre jedoch der auf diese Weise begründete Größenvergleich der unendlichen Mengen immer nur ein relativer, der eingeschränkt bliebe auf jene Mengen, deren Umschlagspläne im Einschlußverhältnis zu einander stehen.

Offenbar ist jedoch mit dieser durch die Horizontoffenheit der primären Vorgegebenheit ontologisch begründbaren relativen Größenunterschiedenheit überhaupt noch nicht dasjenige Phänomen getroffen, das die Mengenlehre mit Verschiedenmächtigkeit bezeichnet. Gerade die allermeisten im Plan-Einschlußverhältnis zueinander stehenden Mengen werden von ihr als größengleich bezeichnet. Andererseits Mengen, deren Umschlagspläne überhaupt nichts unmittelbar mit einander zu tun haben, wie die Mengen der ganzen und der transzendenten Zahlen, als verschiedenmächtig aufgewiesen. In ähnlicher Weise werden auch die endlichen Mengen zu einander in ein Größenverhältnis gebracht, ohne daß der Sachcharakter der Elemente, der der Planbestimmtheit der unendlichen Mengen entsprechen würde, Berücksichtigung fände. Allerdings muß das Woraufhin des Vergleichs endlicher Mengen für unendliche Mengen seinen Sinn verlieren. Denn deren Teile werden gerade wesentlich als stellenlos verstanden, Stellenmannigfaltigkeiten können nicht aufeinandergelegt werden.

Die Frage, ob von der analysierten Zeitlichkeit aus so etwas wie die Verschiedenmächtigkeit unendlicher Mengen ontologisch zu begründen sei, muß also vorläufig verneint werden. Der gewonnene Boden reicht nicht aus, um dem speziellen Sinne des Mächtigkeitsphänomens schon nahe zu kommen. Es muß daher versucht werden, in einer durch Subordinierung spezieller gerichteten ontologischen Orientierung jene seinsmäßigen Abgrenzungsmöglichkeiten zu erreichen, die das in Frage stehende Phänomen offenbar zu fordern hat.

§ 10.

Die Überabzählbarkeit der unendlichen Mengen.

Die Enthüllung des Seins einer unendlichen Menge war im Vorangehenden wesentlich im vergleichenden Blick auf die Seinsstruktur endlicher Mengen erfolgt und konnte prinzipiell nur so weit geführt werden, als diese Gegenüberstellung Vergleichsmomente bot. Der zunächst nur methodisch, aber dann auch sachlich geforderte Versuch einer Beschreitung des Weges ontologischer Subordinierung muß daher die Endlichkeit als das Wogegen seinsmäßiger Abgrenzungen fallen lassen und in der Unendlichkeit selbst nach Hinsichten forschen, die Anlaß zu wesensmäßigen Differenzierungen geben. Das allgemeine Wesen einer unendlichen Menge aber ist, wie sich wohl unumstößlich zeigte, notwendig durch Zeitlichkeit als die ursprüngliche Einheit von Zumalgegebenheit und Vorgegebenheit konstituiert. Die subordinierende Neueinstellung der Untersuchung kann daher nur den Sinn haben, die allgemein das Sein der unendlichen Menge bestimmende Zeitlichkeit auf mögliche Modifikationen hin zu befragen, die ebensovielen Wesensarten entsprechen, in welche die unendlichen Mengen selbst ihrem Sein nach zerfallen.

Diesen möglichen Differenzierungen der Zeitlichkeit ist jedoch nicht in beliebiger Absicht nachzugehen, sondern vor allem mit Rücksicht darauf, den Grund der Möglichkeit einer Größenbestimmtheit unendlicher Mengen zu enthüllen. Es werden daher vor allem jene Charaktere der Zeitlichkeit auf mögliche Modifikationen hin zu untersuchen sein, die am ehesten die Gewähr bieten möchten, einer Lösung der gestellten Aufgabe näherzuführen. Wiederum ergibt sich die Notwendigkeit, einen Hinweis auf solche Charaktere zu erhalten, damit die Untersuchung nicht richtungslos bleibt. Es handelt sich also allgemein um die Frage, in welchem Sinne denn zwei verschiedene Gegebenheitsweisen, als welche differierende Formen der Zeitlichkeit anzusprechen wären, Größenunterschiede von Mengen überhaupt zu begründen vermöchten.

Eine Lösung der so allgemein gestellten Frage wurde im Vorangehenden bereits erreicht, wenn auch als scheinbar selbstverständlich nicht ausdrücklich gekennzeichnet. Die beiden schlechthin unterschiedenen Gegebenheitsweisen der Räumlichkeit und der Zeitlichkeit be-

stimmen die Gegenständlichkeit der endlichen und unendlichen Mengen in einer Weise, die ihre Größenunterschiedenheit[1]) ontologisch verständlich macht, und zwar ist es die Entschränkung der Horizonthaftigkeit bezw. -offenheit der Räumlichkeit, die zu einem wesensmäßig erweiterten Gegenstandsfeld gelangen läßt und die Möglichkeit eines Größenvergleichs von gänzlich anderer Art, als es der zwischen endlichen Mengen übliche ist, ersichtlich macht.

Als eine spezielle Form der Vorgegebenheit wurde im Vorangehenden die primäre Vorgegebenheit entwickelt. Sie bestimmt daher in Einheit mit der Zumalgegebenheit ein Modifikat der Zeitlichkeit, von dem ausgegangen werden kann, um zu weiteren möglichen Modifikationen ihrer zu gelangen. Unter analogisierender Aufnahme des für die Endlichkeit und Unendlichkeit von Mengen maßgebenden Wesensunterschiedes wird daher versucht werden müssen, eine Entschränkung der für die primäre Vorgegebenheit charakteristischen Horizonthaftigkeit zu erreichen und eine neue Form des Gegebenseins bezw. Nichtgegebenseins zu gewinnen, welche die Zeitlichkeit in geeigneter Weise neu zu determinieren vermöchte.

Ein Hinweis auf eine neue, die Unendlichkeit von Mengen mit konstituierende Gegebenheitsweise lag von der Struktur der primären Vorgegebenheit her bereits vor. Der Mächtigkeitshorizont einer Menge wird schon immer als erweiterungsfähig verstanden, d. h. er verweist in die Weite einer Form des Gegebenseins bezw. einer Vorgegebenheit, die gleichfalls durch eine Umschlagsmöglichkeit bestimmt sein muß, ohne daß aber der Plan des Umschlags als solcher gegeben vorliegt. Ein vorliegender Plan wird *entworfen*, ein nichtvorliegender *nichtentworfen* genannt. Für die neue Art der Vorgegebenheit ist also charakteristisch, daß der ihren Umschlag bestimmende Plan in Nichtentworfenheit steht, es also für den Umschlag in Zumalgegebenheit erst des In-Gang-Kommens eines Geschehens bedarf, das die Nichtentworfenheit des Planes zur Entworfenheit bringt und damit die Vorgegebenheit erst einmal zu einer primären werden läßt.

Eine zweite Art von Umschlag wird also für die zu entwerfende Struktur einer Zeitlichkeit maßgebend, nämlich nicht ein Umschlag, der auf die Gegebenheit von Teilen, sondern ein diesem vorgeordneter, der auf die Entworfenheit von Plänen gerichtet ist. Von der positiven Kennzeichnung dieser neuen Art des Umschlags wird die Charakteristik der neuen Vorgegebenheit in ihrer möglichen Horizonthaftigkeit abhängen. — Man könnte aber zuerst daran denken, daß für die Art auch des neuen Umschlags, der nicht planlos erfolgen darf, um nicht die Horizonthaftigkeit der Vorgegebenheit in Frage zu

[1]) Sie kommt etwa in der Kantischen Formulierung zum Ausdruck, das Unendliche sei eine „Vielheit, größer als jede Zahl". Diss. § 1, 2 Anm.; Kritik d. r. V. B, 458.

stellen, selbst ein übergeordneter vorliegender Plan maßgebend ist, der dessen Geschehen im Vollzuge voll determiniert und das jeweils nicht Entworfene an Plänen selbst im Horizonte der Mächtigkeit stehen läßt. Es kann aber eine Nichtgegebenheit, die durch einen wie immer bestimmten, jedoch gegebenen und voll determinierenden Umschlagsplan bedingt wird, nur mit der primären Vorgegebenheit ihrer Definition nach identisch sein. Soll es sich daher um eine neue Art der Vorgegebenheit handeln, so kann die sie bestimmende Möglichkeit eines Umschlags der Nichtentworfenheit in Entworfenheit nicht selbst nach einem von vornherein vorliegenden Plane statthaben. Mit anderen Worten, der Horizont, der das Nichtentworfene an Plänen vereinigt, muß den gleichen Charakter tragen wie jener, in den das durch diese Vorgegebenheit Ausgezeichnete an Teilen eines Ganzen zu stehen kommt. — Wenn also für den fraglichen Umschlag der Nichtentworfenheit in Entworfenheit nicht selbst wieder absolute Planbestimmtheit in Anspruch zu nehmen ist, andererseits aber auch an eine Planlosigkeit nicht gedacht werden soll, so muß versucht werden, eine mittlere Linie zu erreichen, die den Umschlag zwar plangemäß, aber nicht völlig vorausdeterminiert sein läßt. — Liegt etwa der Auftrag zum Bau eines gewissen Bedingungen genügenden Hauses vor, so ist der Entwurf eines Planes Voraussetzung des Baues. Für den Umschlag der Nichtentworfenheit eines solchen Planes in Entworfenheit gibt es nun nicht selbst wiederum einen Plan, vielmehr ist der Entwurf in einen Spielraum möglicher Entwürfe hineingestellt. Andererseits erfolgt er auch nicht planlos, gleichsam aufs geratewohl. Er wird vielmehr geführt von etwas, das selbst gegeben vorliegen muß, soll der Entwurf nur möglich sein. Es ist das Gerichtetsein auf den Plan, die P l a n o r i e n t i e r u n g. Sie verleiht von vornherein dem entwerfenden Geschehen gewisse Richtlinien, die einzuhalten sind, um einer Beliebigkeit in der Art des Entwurfs überhaupt Raum zu geben.

Eine solche Planorientierung aber ist es, die für den für eine Vorgegebenheit charakteristischen Umschlag der Nichtentworfenheit in Entworfenheit maßgebend sein muß. Sie zeigt die Richtung an, ohne schon über den Weg verfügen zu lassen. Sie gibt Mittel an die Hand, ohne schon die Möglichkeiten ihres Gebrauchs ermessen zu lassen. Über die jeweils besondere Art des Umschlags kann also bei Planorientierung nur im Umschlag selbst entschieden werden. Terminologisch soll eine Umschlagsmöglichkeit, für die nur eine Planorientierung gegeben vorliegt, U m s c h l a g s f ä h i g k e i t heißen; entsprechend der Horizont, der das Nichtgegebene vereinigt, für welches Umschlagsfähigkeit besteht, F ä h i g k e i t s h o r i z o n t.

Von hier aus aber wird es möglich, die zuerst konstruktiv angesetzte neue Form des Vorgegebenseins positiv zu umreißen. Die Möglichkeit ihres Umschlags in Zumalgegebenheit wird durch eine zweifache Abhängigkeit konstituiert: nämlich 1. Abhängigkeit vom

In-Gang-Kommen eines Geschehens, das als planorientiertes die Nichtentworfenheit in Entworfenheit bringt, und 2. (= der primären Vorgegebenheit) Abhängigkeit vom In-Gang-Kommen eines Geschehens, das nach entworfenem Plan den Umschlag der Nichtgegebenheit (der Teile) in Gegebenheit mit sich führt. Diese durch eine zweifache Abhängigkeit ausgezeichnete Vorgegebenheit soll sekundäre Vorgegebenheit heißen. Durch ihre wesensmäßige Verbundenheit mit der primären Vorgegebenheit und Zumalgegebenheit bestimmt sie eine Form der Zeitlichkeit, die das Sein der unendlichen Mengen in neuer Art zu fundieren vermag.

Mit der sekundären Vorgegebenheit wird also eine abermalige Entschränkung der Horizonthaftigkeit einer schon entschränkenden Gegebenheitsweise vollzogen und eine Weite des Gegebenheitsbereiches erreicht, von welcher gewiß die Zumalgegebenhit, aber ebenso auch die zuerst herausgestellte Art der Zeitlichkeit wesensmäßig entfernt bleibt. So läßt sich bereits vermuten, daß die erzielte Ausweitung des Gegebenheitsbereiches des Unendlichen selbst wohl als Bedingung der Möglichkeit von Verschiedenmächtigkeit ansetzbar ist. Bevor aber einer Nachprüfung nähergetreten wird, soll erst zugesehen werden, ob jener zweimal erfolgreich durchgeführte ontologische Entschränkungsprozeß fortgesetzt werden kann oder selbst gar in infinitum verläuft. Denn erst dann wird sich das mögliche Ausmaß der ontologischerseits für die Verschiedenmächtigkeiten verfügbaren Bedingungen wirklich umgrenzen lassen.

Es muß also unter Weiterverfolgung des eingeschlagenen Weges darangegangen werden, von der Horizonthaftigkeit der sekundären Vorgegebenheit aus zu einer neuen Weise des Vorgegebenseins und damit neuen Modifikation der Zeitlichkeit zu gelangen. — In jedem Falle ist auch die sekundäre Vorgegebenheit auf eine weitere Nichtgegebenheit bezogen. Es fragt sich nur, ob diese Nichtgegebenheit nicht völliger Nichtigkeit gleichzuachten ist. Setzt man sie jedoch einmal als Vorgegebenheit an, so wäre sie als in der Möglichkeit eines Umschlags stehend zu kennzeichnen, für den es weder Planorientierung noch gar Planbestimmtheit gibt. Möglichkeit erhält dann im wesentlichen die Bedeutung einer Abhängigkeit vom In-Gang-Kommen eines Geschehens, das die Planunorientiertheit in Planorientiertheit umschlagen läßt.

Jene Vorgegebenheit, für welche die Möglichkeit des Umschlags in Zumalgegebenheit durch eine dreifache Art der Abhängigkeit bestimmt wird, nämlich die genannte wie die früher gekennzeichneten, soll tertiäre Vorgegebenheit heißen. Im Blick auf sie muß auch der Fähigkeitshorizont schon immer als offener, d. h. erweiterungsfähiger verstanden sein. In ihrer Verbundenheit mit der Zumalgegebenheit, primären und sekundären Vorgegebenheit bestimmt sie eine weitere Modifikation der Zeitlichkeit, die wiederum neu das Sein unendlicher Mengen zu konstituieren vermag.

Nach dieser weiteren Entschränkung, durch welche über die durch sekundäre Vorgegebenheit bestimmte Art der Zeitlichkeit hinaus zu einer wieder umfassenderen Form des Gegebenseins von Teilen eines Ganzen gelangt wurde, sieht es ganz so aus, als ob sich in infinitum fortfahren ließe und in unbegrenzter Mannigfaltigkeit neue Horizonte des Nichtgegebenseins zu Gesicht zu bringen wären. In der Tat aber wurde mit der tertiären Vorgegebenheit bereits das Ende der denkbaren Ausweitung und Entschränkung der Weisen eines Nichtgegebenseins erreicht. Das wird sofort ersichtlich, wenn man daran geht, die Horizonthaftigkeit der tertiären Vorgegebenheit zu bestimmen, und sehen muß, daß das in ihr Stehende überhaupt über gar keinen Horizont mehr verfügt. Wo aber ein Horizont wesensmäßig fehlt, dort verliert Beschränktheit und Entschränkungsmöglichkeit seinen Sinn.

Diese Horizontlosigkeit der tertiären Vorgegebenheit und entsprechend der durch sie modifizierten Zeitlichkeit aber ergibt sich aus der völligen Planlosigkeit, d. h. Planunbestimmbarkeit ihres erst eine Orientierung schaffenden Umschlags. Denn ein Umschlag, der nicht einmal durch eine Planorientierung geführt wird, verfügt überhaupt über keine Orientierung und kann als planlos erfolgend nur verstanden werden. War es aber einzig die Planmäßigkeit eines Umschlags, welche das in seiner Möglichkeit Stehende horizonthaft gegen anderes, dessen Planmäßigkeit nicht gegeben (unbelichtet) war, sich abgrenzen ließ, so schließt das Fehlen einer jeglichen Planorientierung auch jedes Bezogensein des durch die tertiäre Vorgegebenheit Vereinigten auf noch weiteres Nichtgegebenes, wiewohl nicht Nichtiges aus. Die tertiäre Vorgegebenheit umfaßt daher den gesamten Bereich des sogenannten Möglichen. Sie führt schon bis an das schlechthin Nichtseiende heran. Von einer Abgegrenztheit auch der tertiären Vorgegebenheit könnte also nur in einem uneigentlichen Sinne gesprochen werden. Denn will man den Terminus brauchen, so handelt es sich um eine Horizonthaftigkeit, die nicht mehr Seiendes von Seiendem, sondern bedingt Unzugängliches von unbedingt Unzugänglichem getrennt sein läßt. Gleichwohl soll, um eine gewisse formale, wenn auch nicht mehr sachlich gegründete Analogie zu den früheren Arten der Vorgegebenheit herzustellen, von dem Möglichkeitshorizont gesprochen werden, der das in tertiärer Vorgegebenheit Befindliche „vereinigt".

Die entwickelten drei Arten der Zeitlichkeit, auf einander durch entschränkende Bereicherung der Formen der Vorgegebenheit aufbauend, stellen einen ontologisch zureichenden Grund der Möglichkeit dessen dar, was die Mengenlehre als Verschiedenmächtigkeit bezeichnet. Wird nämlich die Mächtigkeit einer unendlichen Menge als die Art der Horizonthaftigkeit der ihr Sein konstituierenden Zeitlichkeit ausgelegt, und wird zudem bedacht, daß die Formen der entwickelten Zeitlichkeit nicht irgendwie nebeneinander, sondern in

einem Aufbauverhältnis zu einander stehen, dann wird klar, daß die Verschiedenmächtigkeit qua Verschiedenhorizonthaftigkeit die unendlichen Mengen in ein Verhältnis zu einander bringen muß, das als ein Größenverhältnis seinen ontischen Ausdruck finden kann. Werden daher bestimmte unendliche Mengen auf die gekennzeichnete Wesensunterschiedenheit hin befragt und verstanden, so besteht durchaus die Möglichkeit, daß an ihnen ontische Eigenarten entdeckt werden, die dazu zwingen, ihr Verhältnis zu einander als absolutes Größenverhältnis zu bestimmen. Allerdings muß die dritte Form der Zeitlichkeit von vornherein davon ausgeschlossen werden, als das Sein einer unendlichen Menge konstituierend und über ihre Mächtigkeit entscheidend ausgewiesen werden zu können. Denn zu der sie bestimmenden tertiären Vorgegebenheit führt auch nicht die kleinste Brücke einer Umschlagsvoraussicht. Wovon aber eine Voraussicht prinzipiell keine Kunde geben kann, das darf auch nicht als konstituierendes Moment einer Gegenständlichkeit angesetzt werden. Kommt also einem auf tertiäre Vorgegebenheit hin entworfenen Unendlichsein auch keine erkenntniserweiternde Bedeutung zu, so kann sein Verständnis mit der Funktion einer Kantischen Idee verglichen werden, wohl geeignet zum regulativen Gebrauch in der Durchmessung eines Erkenntnisgebietes, aber unfähig zu eigenen konstitutiven Bestimmtheiten.

Die Analyse führt also zu dem Ergebnis eines Zerfalls des Wesens unendlicher Mengen in drei Wesensarten, die inbegrifflich miteinander verbunden, drei Formen einer Zeitlichkeit entsprechen. Von ihnen kommen jedoch nur zwei als Wesenheiten mathematischer Objekte in Frage. Was letztlich mit Rücksicht auf die positive Wissenschaft selbst erreicht wurde, wäre daher eine Begründung des möglichen Zweigeteiltseins der unendlichen Mengen, wie es die Mengenlehre mit ihrer Unterscheidung der abzählbaren und überabzählbaren Mengen auch tatsächlich kennt. Doch bleibt sie nicht bei der Unterscheidung von nur zwei Arten der Mächtigkeit stehen, sondern findet den Weg zu überabzählbar unendlichen vielen solcher Arten. Es muß zugegeben werden, daß die Möglichkeit eines solchen Ausmaßes der Unterschiedenheit auch nicht im entferntesten zur Einsicht gebracht werden konnte. Will man dieser Problematik nähertreten, so wird man nicht umhin können, in der gleichen Weise, als es bisher versucht wurde, zu verfahren, nämlich zunächst zu sehen, ob aus der einfachen Seinskonstitution der überabzählbaren Mengen heraus, (d. h. in Abgrenzung gegen die der abzählbaren) ein Grund der Möglichkeit für eine Verschiedenmächtigkeit im Bereich des Überabzählbaren zu enthüllen ist und, wenn dieser Versuch, wie erwartet werden darf, mißlingt, den Weg neuer ontologischer Subordinierung zu beschreiten. Es hat allerdings den Anschein, als ob dieses Problem von einer in Angriff zu nehmenden Dialektik der Mengenlehre unzertrennbar bleibt.

Anhang: Zur Dialektik der Mengenlehre.

Die Analysen über das Sein der unendlichen Mengen müssen gewissen Grundschwierigkeiten gegenüber erprobt werden, die der ontischen Wissenschaft von den unendlichen Mengen erwachsen sind und die, von ihr her ohne Aufklärung geblieben, mit dem Wesen der Gegenstände unzertrennlich verbunden scheinen. Diese Schwierigkeiten aber geben sich als Antinomien, welche bei allzu zwangloser Anwendung des Cantor'schen Mengenbegriffes entstehen, unter Innehaltung gewisser Einschränkungen dagegen wieder verschwinden. Der Grund für dieses Entstehen und Vergehen aber muß ermessen, der dialektische Schein, der zum Irrtum verleitet, enthüllt werden, soll nicht ein ganzes Wissensgebiet einer gewissen Fraglichkeit ausgeliefert bleiben.

Besteht aber die Aufgabe, den Ursprung von Widersprüchen, der nicht offen zutage liegt, aufzudecken, so wäre zunächst eine Orientierung darüber zu fordern, wo man ihn überhaupt zu suchen habe. Der Quellen, denen er entspringen kann, aber bieten sich zwei verschiedene dar. Entweder die begriffsbestimmende Definition, aus welcher gefolgert wird, ist fehlerhaft, oder aber der Gebrauch, der von ihr zu machen ist, vermag einem Schein zu verfallen. Man wird daher, ehe man an die Antinomien selbst herangeht, gut daran tun, diesen Spielraum ihrer möglichen Gründe zu durchforschen, um für die Erfassung des wirklichen Grundes die orientierunggebende, erschöpfende Vorarbeit zu leisten.

Die Cantor'sche Definition, die zu allererst auf ihre Eigenart und Rechtmäßigkeit hin zu überprüfen wäre, lautet: „Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“ [1]). Offenbar hat man es mit einer Wesensdefinition zu tun. Sie will zeigen, was dazu gehört, damit ein Gegenstand als Menge angesprochen werden kann. Mit nichts anderem als dem Wesen von Mengen hatten sich aber auch die vorangehenden Untersuchungen beschäftigt.

---

[1]) Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Math. Ann. Bd. 46, S. 481.

Ihre Ergebnisse müssen daher mit der Cantor'schen Definition in Einklang zu bringen sein. Bei der Gegenüberstellung wäre in Betracht zu ziehen, daß Cantor nur ein einziges allgemeines Wesen einer Bestimmung unterwirft, während im Vorangehenden vier von einander grundverschiedene Wesenheiten zur Abgrenzung gelangten. Es wird daher in besonderem zu beachten sein, ob die Cantor'sche Mengendefinition jene Allgemeinheit erreicht, die sie beansprucht, d. h. ob sie imstande ist, aus den entwickelten 4 Wesenheiten das Gemeinsame herauszuholen.

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten. Genauer, sie ist ein aus Objekten Zusammengefaßtes, Gebildetes. Darin liegt, die Objekte bieten sich nicht von sich aus als verbunden dar, sondern ihre Verbundenheit wird ihnen von außen her aufgezwungen. Indifferenz der Art ihres Zusammengehörens gegenüber ist für die Teile einer Menge charakteristisch. Die Zusammenfassung von Objekten aber erfolgt des weiteren zu einem Ganzen. Ein Ganzes ist ein zusammengesetzter Gegenstand, der, durch die Weise seines Gegebenseins mit einem Horizont versehen, anderem gegenüber sich abzuheben vermag. Die Horizonthaftigkeit eines Ganzen läßt das zu ihm Vereinigte verschieden und bestimmt sein, verschieden, sofern es auf eine Stellenmannigfaltigkeit bezogen wird, und bestimmt, sofern jede Einigung mit anderem schon einer Änderung gleichgesetzt wird. Schließlich sind die Gegenstände, die zu einer Menge verbunden werden können, regionalitätsunabhängig, d. h. es sind beliebige Gegenstände unserer Anschauung oder unseres Denkens als jener Erkenntnisquellen, die für einen endlichen Verstand einzig in Frage kommen.

Kann also die Cantor'sche Definition den Anspruch auf größte Allgemeinheit behaupten und muß sie auch mit Bezug auf die herausgestellten vier Wesenheiten von Mengen, — die sämtlich durch eine Art von Horizonthaftigkeit bestimmt sind, wenn auch diese von der Horizontoffenheit der Zumalgegebenheit bis zur Horizontlosigkeit der tertiären Vorgegebenheit variiert — als angemessen angesehen werden, so wäre zu überlegen, welcher fehlerhafte Gebrauch von dieser Definition zu Antinomien führen könnte bezw. worin eine Gefahr der Verleitung zum Irrtum bestehen möchte. Eine solche Gefahr aber kann in der Tat aus der allzugroßen Allgemeinheit der Definition erwachsen.

Kommt nämlich bei der Thematisierung einer Klasse von Gegenständen ausdrücklich nur ihr allgemeinstes Wesen zur Entfaltung, während dieses selbst noch mannigfacher ontologischer Differenzierungen bezw. Determinierungen fähig ist, so liegt es nahe, ob der Einfachheit des obersten Wesens die Vielfalt der subordinierten Wesenheiten aus dem Blick zu verlieren und, statt sie sämtlich gegeneinander zu unterscheiden, eine von ihnen zu bevorzugen und deren Sinn unausdrücklich dem obersten Wesen determinierend unterzuschieben. Dann würde zwar dieses letztere seinem ausdrück-

lichen Sinne nach recht bestimmt, der eigentlichen Bedeutung, in der es fungiert, nach aber unterdeterminiert sein.

Unterliegt eine Erkenntnis einer solchen Gefahr der Unterschiebung, so steht für die individuelle Kennzeichnung einer durch ein allgemeines Wesen bestimmten Klasse von Gegenständen von vornherein überhaupt nur ein einziges voll determiniertes Wesen im Blick, nämlich jenes bevorzugte unter den Wesensdifferenzierungen, als welches das allgemeinste Wesen unausdrücklich verstanden wird. Werden daher Gegenstände thematisch, die nicht dieses besonderen Wesens sind, obgleich der Klasse ebenso zugehören, so fügen sie sich nur insoweit einer ausweisbaren Bestimmung, als wie sich das ihnen übergeworfene und das ihnen wirklich aneignende Wesen überschneiden. Tritt jedoch der Fall ein, daß die beiden konkurrierenden Wesenheiten dem Gegenstande zu einander oppositionelle Charaktere zuweisen, so entstehen Widersprüche, die so lange unauflösbar sind, als die mit der Unterschiebung vollzogene Nivellierung der Seinsmöglichkeiten der Gegenstände nicht aufgehoben wird.

Die Entwicklung der vier verschiedenen Wesenheiten von Mengen aber läßt gegenüber der einen Cantor'schen Definition in der Tat eine Gefahr der Unterschiebung als bestehend ersichtlich werden. Und es liegt zuerst nahe, daran zu denken, daß von der Gewöhnung des Umgangs mit den endlichen Mengen her die Wesensunterschiedenheit von Endlichem und Unendlichem überhaupt übersehen und dieses von jenem her zu begreifen unternommen wird. Daß Cantor von einer solchen allgemeinen Verendlichung des Unendlichen weit entfernt war, leuchtet schon bei geringer Vertrautheit mit seiner Mengenlehre ein. Daß er zudem um diese schlechthinige Unterschiedenheit ausdrücklich wußte und in der Nivellierung dieses Unterschiedes die Quelle von Paradoxien erkannte, kann dazu beitragen, die Weite des Horizontes, über den er verfügte, ersichtlich zu machen: „Alle sogenannten Beweise wider die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen sind, wie in jedem Falle besonders gezeigt und auch aus allgemeinen Gründen geschlossen werden kann, der Hauptsache nach dadurch fehlerhaft, und darin liegt ihr πρῶτον ψεῦδος, daß sie von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdrängen, während die unendlichen Zahlen doch andererseits, wenn sie überhaupt in irgendeiner Form denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur der Dinge durchaus abhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkür und unserer Vorurteile ist“ [2]).

---

[2]) Cantor, G, Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das aktuale Unendliche. Zeitschr. f. Philos. u. phil. Kritik N. F., Bd. 88, S. 226. Entsprechend: Mitt. zur Lehre vom Transfiniten, Zeitschr. f. Philos. u. phil. Krit., N. F., Bd. 91, S. 100 u. 101/2.

So läßt sich negativ bereits als wahrscheinlich hinstellen, daß als Ursprung der Antinomien eine Bevorzugung des Endlichen zugunsten des Unendlichen für Cantor und die Mengenlehre unmittelbar nicht in Frage kommen kann. Es bleibt daher überhaupt nur noch die weitere Möglichkeit offen, daß die Antinomien ihre Entstehung einer Nivellierung der Wesensunterschiede, die im Bereich des Unendlichen selbst statthaben, verdanken. Die Analyse vermochte drei verschiedene Wesenheiten unendlicher Mengen gegeneinander abzugrenzen. Es muß daher gefragt werden, ob Cantor um diese Wesensunterschiede im Unendlichen ebenso ausdrücklich wußte, wie um die zwischen Endlichem und Unendlichem bestehenden.

„Unter einem aktualen Unendlichen (ἀφωρισμένον) ist . . . ein Quantum zu verstehen, das einerseits nicht veränderlich, sondern vielmehr in allen seinen Teilen fest und bestimmt, eine richtige Konstante ist, zugleich aber andererseits jede endliche Größe derselben Art an Größe übertrifft."

„ . . . sind wir genötigt, eine fundamentale Distinktion zu machen, indem wir unterscheiden:

a) Vermehrbares aktuales Unendliches oder Transfinitum.

b) Unvermehrbares aktuales Unendliches oder Absolutum.

. . . . Das Transfinite mit seiner Fülle von Gestaltungen und Gestalten weist mit Notwendigkeit auf ein Absolutes hin, auf das „wahrhaft Unendliche", an dessen Größe keinerlei Hinzufügung oder Abnahme statthaben kann und welches daher quantitativ als absolutes Maximum anzusehen ist. Letzteres übersteigt gewissermaßen die menschliche Fassungskraft und entzieht sich namentlich mathematischer Determination . . ." [3]).

Es ergibt sich, daß Cantor ein zweifaches Wesen auch im Bereich des Unendlichen ausdrücklich unterscheidet, ein vermehrbares Unendlich und ein unvermehrbares, in obiger Terminologie ein auf tertiäre Vorgegebenheit hin verstandenes und ein nicht daraufhin verstandenes Unendlich. Denn mit dem Titel Vermehrbarkeit bringt er nur dasjenige zum Ausdruck, was ontologisch auf die Horizontoffenheit der Gegebenheitsweise zurückgeführt wurde, während die Unvermehrbarkeit in der Horizontlosigkeit des Gegenstandes gründet. Allerdings verliert Cantor die zweite Art des Unendlichen als mathematisch in irgendeinem Sinne relevant alsbald aus dem Blick, indem er für dieses nur ein theologisches und philosophisches, aber kein mathematisches Interesse letztlich in Anspruch nimmt. Im Einklang hiermit ist er daher auch der Meinung, daß als „Prinzip des Unterschiedes im Transfinitum, welches zu verschiedenen transfiniten Zahlen und zu verschiedenen Mächtigkeiten führt" [4]), ein einziges genügt. Demgegenüber sollten die Überlegungen der §§ 9 und 10 ge-

[3]) a. a. O., S. 108/09. Zu vergl. S. 81/82 und Bd. 88 S. 227.

[4]) Zeitschr. f. Philos. u. philos. Krit., N. F., Bd. 91, S. 99.

rade zeigen, daß die einfache Horizontoffenheit als einziges Von-woaus einer Begründung der Möglichkeit von Verschiedenmächtigkeiten nicht ausreicht.

So legt sich von den philosophischen Überlegungen Cantors selbst her der Gedanke nahe, daß das zwar unausdrücklich, d. h. vorontologisch, aber doch nicht ausdrücklich, d. h. ontologisch erfolgte Auseinanderhalten der Wesenheiten unendlicher Mengen die Antinomiengefahr vor allem in den Fällen verstärken mußte, in denen nur ein wirkliches, seiner selbst bewußtes Hinblicknehmen auf jene Wesensverschiedenheit davor hätte bewahren können, sich von einem Schein betrügen zu lassen. Die Antinomien werden daher daraufhin zu untersuchen sein, ob das in ihnen zur Anwendung gelangende allgemeine Wesen einer unendlichen Menge vielleicht jeweils eine spezielle Deutung erfährt, mit welcher, ohne um die „Erschleichung" zu wissen, im Vertrauen auf die Allgemeinheit der Definition an Gegenstände bestimmend herangegangen wird, die wesensmäßig zwar nicht der allgemeinen, aber doch der speziellen Deutung widerstreben.

Man kann drei Klassen von Antinomien unterscheiden, aus deren jeder ein Beispiel entnommen werden soll, um die ausgesprochene Vermutung wenigstens in einem gewissen Umfange zu verifizieren. Eine erste Klasse enthält die Allheits-Antinomien, die mehr oder weniger auf die Menge a l l e s Seienden bezogen sind. Zur zweiten gehören die eigentlich mathematischen Antinomien, die bereits mit gewissen mengentheoretischen Begriffen arbeiten. In die dritte Klasse endlich, die von der Mengenlehre noch als die harmloseste angesehen wird, fallen die Bezeichnungs-Antinomien, die mit dem Problem möglicher Bezeichnungen endlicher und unendlicher Zahlen zusammenhängen.

1. „ . . . die Menge L aller überhaupt denkbaren Mengen betrachten. Diese Menge scheint die umfassendste überhaupt denkbare Menge darzustellen, in der nur Mengen als Elemente auftreten. Dennoch können wir im Widerspruch zu diesem Wesen von L leicht eine noch umfassendere derartige Menge bilden, z. B. dadurch, daß wir die Menge L aller Teilmengen von L bilden, die sogar eine größere Mächtigkeit besitzt als L. Wir bilden so paradoxerweise zu der „denkbar umfassendsten" von Mengen eine „noch umfassendere" " [5]).

Zur Vereinfachung der Analyse soll diese Argumentation in die Form eines Syllogismus gebracht werden.

Obersatz: Die Menge aller Mengen ist die umfassendste Menge von Mengen.

Untersatz: Zu jeder Menge kann durch Teilmengenbildung eine noch umfassendere gebildet werden.

---

[5]) A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl., 1928, S. 212.

Schluß: Also ist die umfassendste Menge nicht die umfassendste.

Man sieht sofort, daß, wenn überhaupt ein Fehlschluß nachzuweisen ist, er nur aus einer Zweideutigkeit im Gebrauch des Begriffes Menge entspringen könnte, d. h. die Gestalt einer quaternio terminorum annehmen würde. Es muß daher der Mittelbegriff im Ober- und Untersatz unter Heranziehung der Resultate früherer Überlegungen kurz analysiert werden.

Die Menge aller Mengen muß als Ganzes wesensmäßig einen anderen Charakter haben als die Ganzheiten, welche sie enthält. Denn diese sind als solche schon immer auf anderes „außerhalb ihrer" bezogen, gleichgültig, ob es dieses wirklich geben mag oder nicht. Die Menge aller Mengen dagegen reicht über jedes mögliche „Außerhalb von . . ." hinaus. Ihrem Sinne nach kann es kein Seiendes geben, das nicht in ihr enthalten wäre. Der Charakter eines Ganzen, nicht mehr abgrenzend, einschränkend zu sein, wurde als Horizontlosigkeit bezeichnet. Diese entspricht einer Gegebenheitsweise der Teile des Ganzen, die sich wesentlich als tertiäre Vorgegebenheit bestimmen ließ [6]). So ergibt sich, daß die Menge aller Mengen ihrem Sinne nach auf tertiäre Vorgegebenheit hin entworfen sein muß. Es läßt sich keine Planorientierung denken, von welcher aus eine vollständige Voraussicht auf den Umschlag der Nichtgegebenheit der Teile in Gegebenheit zu bestehen vermöchte.

Es fragt sich aber, ob die Menge des Untersatzes, zu welcher durch Teilmengenbildung eine umfassendere Menge zu bestimmen ist, gleichen Wesens sei, wie für die Richtigkeit des Syllogismus zu fordern wäre. Die für die Menge in Anspruch genommene Teilmengenbildung gibt sich nun als mathematische Operation, die, an mathematischen Objekten vorgenommen, zu ausweisbaren Ergebnissen zu führen vermag. Voraussetzung einer jeden Operation aber ist eine wie auch immer vermittelte Zugänglichkeit zu den Objekten, an denen sie vollzogen werden soll. Denn eine mit gänzlich unzugänglichen Objekten vorgenommene Operation ist auch ihrem Ergebnis nach unzugänglich und entbehrt des mathematischen Sinnes. Das Wesen einer Menge, mit welcher mathematisch operiert werden soll, kann also unmöglich auf tertiäre Vorgegebenheit hin verstanden sein. Denn das auf diese Gegebenheitsweise Bezogene entzieht sich schlechthin jeder Zugänglichkeit, selbst der durch eine Voraussicht in der Planorientierung vermittelten.

So ergibt sich allgemein, daß Ober- und Untersatz an je verschiedenen Wesen orientiert sind, die sich gerade in jenen Charakteren gegenüberstehen, die als übertragbar in den Prämissen angesetzt wurden.

2. „ . . . Menge K aller Kardinalzahlen; . . . gibt es nämlich keine größte, sondern zu jeder beliebigen eine noch größere; die

[6]) Siehe oben § 10.

Menge aller Kardinalzahlen erfüllt also die Voraussetzung des Satzes . . ., nach dem die Summe aller Kardinalzahlen von K größer ist als jede Kardinalzahl von K. Die Summe wäre also größer als jede Kardinalzahl und doch gleichzeitig selbst eine Kardinalzahl“ [7]).

Ein entsprechender Syllogismus würde lauten:

Obersatz: Außerhalb der Menge aller Kardinalzahlen gibt es keine weiteren.

Untersatz: Die Summe der Kardinalzahlen einer Menge von Kardinalzahlen, die keine größte enthält, ist größer als jede Kardinalzahl der Menge.

Schluß: Die Summe der Kardinalzahlen der Menge aller Kardinalzahlen bestimmt eine neue Kardinalzahl, die, größer als jede von ihnen, außerhalb der Menge steht.

Die Analogie mit dem ersten Beispiel liegt nahe. Im Obersatz muß die Menge aller Kardinalzahlen ihrem Wesen nach auf tertiäre Vorgegebenheit hin verstanden sein. Denn es kann gewiß nicht eine Planbestimmung, aber auch nicht einmal eine Planorientierung gedacht werden, die von sich aus eine bindende Voraussicht auf sämtliche Kardinalzahlen gestatten würde. Hingegen wird die Menge von Kardinalzahlen, zu welcher durch Summenbildung eine noch größere Kardinalzahl bestimmt wird, ihrem Wesen nach keinesfalls durch die Gegebenheitsweise der tertiären Vorgegebenheit konstituiert sein. Denn solches würde wieder dem operativen Charakter der Summenbildung widersprechen.

3. „Für jede vorgelegte natürliche Zahl n gibt es ‚Schriftnamen' in deutscher Sprache, d. h. schriftlich mit einer endlichen Anzahl von Zeichen (Buchstaben, Zahlen usw.) ausdrückbare eindeutige Kennzeichnungen oder ‚Definitionen'. Unter den Schriftnamen von n gibt es einen oder mehrere von einer möglichst geringen Anzahl von Zeichen. Wir nennen jeden solchen Schriftnamen einen ‚kürzesten' Schriftnamen von n. Denken wir uns zu jeder natürlichen Zahl einen ihrer kürzesten Schriftnamen notiert, so können wir die Zahlen in eine besondere Liste eintragen, deren kürzeste Schriftnamen weniger als 1000 Zeichen umfassen, und so ‚die Menge aller mit weniger als 1000 Zeichen definierbaren natürlichen Zahlen' bilden; es gibt natürlich nur endlichviele solche Zahlen, da ja überhaupt nur endlichviele verschiedene Verbindungen von weniger als 1000 der üblichen Zeichen existieren. Unendlich viele natürliche Zahlen bleiben also außerhalb jener Liste und unter ihnen gibt es (wie in jeder Menge von natürlichen Zahlen) eine kleinste m; m ist hiernach eindeutig bestimmt als ‚die kleinste natürliche Zahl, in deren sämtlichen Schriftnamen jeweils mindestens 1000 Zeichen vorkommen'. Mit den

[7]) a. a. O. S. 212.

soeben hervorgehobenen Worten wird aber für m ein Schriftname angegeben, der weniger als 1000 Zeichen umfaßt; so ist ein Widerspruch für m hergeleitet“ [8]).

Zur Erlangung eines übersichtlichen Syllogismus bedarf es einer gewissen Schematisierung der Argumentation.

Obersatz: Zur Menge der natürlichen Zahlen gibt es eine Menge kürzester Zahlbezeichnungen.

Untersatz: Aus einer unendlichen Menge von Zahlbezeichnungen kann stets eine endliche Menge von Zahlbezeichnungen derart abgesondert werden, daß durch sie eine neue Zahlbezeichnung bestimmt wird, die kürzer ist als die entsprechende Zahlbezeichnung der Menge.

Schluß: Also gibt es auch zur Menge der kürzesten Bezeichnungen der natürlichen Zahlen immer noch kürzere.

Wiederum wird es Aufgabe sein, den Mengenbegriff im Ober- und Untersatz einer Analyse zu unterziehen. — Das Eine zeigt sich auf den ersten Blick, daß für die problematischen Mengen in keiner Weise mehr der Möglichkeitshorizont maßgebend sein kann. Denn für die in Frage stehenden Bezeichnungen gibt es von vornherein eine Planorientierung, die es erlaubt, jede ihrer Mengen als abgeschlossen, d. h. horizonthaft, anzusehen. Für den Mengenbegriff des Obersatzes entsteht daher nur die Frage, ob er auf primäre oder sekundäre Vorgegebenheit hin orientiert zu begreifen ist.

Wird eine unendliche Menge von Zahlzeichen dem Umschlag ihrer Nichtgegebenheit nach durch einen vorgegebenen Plan voll determiniert, so muß sie nach früher Erörtertem in einem Zeichensteigerungsverfahren zur Entwicklung gelangen [9]). Zu einem jeden Steigerungsverfahren aber läßt sich ein weiteres Verfahren angeben, das eine unendliche Teilmenge des jeweils Bezeichneten kürzer zu bezeichnen vermag. Eine durch ein Zeichensteigerungsverfahren konstituierte, d. h. aber ihrem Wesen nach auf primäre Vorgegebenheit hin entworfene unendliche Menge von Zahlzeichen kann also unmöglich eine Menge kürzester Zahlbezeichnungen sein. Wenn aber nicht durch primäre oder tertiäre Vorgegebenheit konstituiert, muß die unendliche Menge kürzester Bezeichnungen der natürlichen Zahlen als durch sekundäre Vorgegebenheit ihrem Sein nach bestimmt angenommen werden.

Ein Beispiel mag zur Veranschaulichung dienen. Das dekadische Ziffernsystem enthält in einem Zeichensteigerungsverfahren eine Menge von Zahlbezeichnungen . . .

. . . . 10 . . . . 100 . . . . 1000 . . . . 10 000 . . . . 100 000 . . . .

Diese sind aber keineswegs die denkbar kürzesten. Vielmehr gelangen in einem Neubezeichnungsverfahren eine unendliche Menge von Zahlen wieder zu einer einfacheren Bezeichnung:

---

[8]) a. a. O. S. 214.

[9]) Vgl. I. Teil, § 3.

$\ldots 10^{10} \ldots 10^{100} \ldots 10^{1000} \ldots 10^{10000} \ldots 10^{100000} \ldots$
Eine Zahl also, zu deren Bezeichnung es im alten System 1000 Zeichen bedurfte, kann in einem neuen mit weniger als 10 Zeichen eindeutig charakterisiert werden.

Prüft man dagegen das Wesen der im Untersatz verstandenen Menge, so gelangt man alsbald zur Einsicht, daß der Umschlag der Nichtgegebenheit ihrer Teile in Gegebenheit nur als durch einen vorliegenden Plan bestimmt zu begreifen ist, der Entwurf auf primäre Vorgegebenheit also stattgefunden haben muß. Denn dort, wo Planorientierung gegeben ist, wo also jedes Zeichen einem eigens entworfenen Plan entspricht, der nicht einem übergeordneten Plan mehr unterstellt werden kann, kommt die Ersetzung eines Zeichens, d. h. Verfahren bestimmenden Planes durch ein einfacheres Zeichen, d. h. letztlich übergeordneten Plan, nicht mehr in Frage.

Legt man als Beispiel wieder das dekadische Ziffernsystem zugrunde und sondert man alle die Zahlen aus, die durch weniger als 1000 Zeichen bestimmt werden, so wird durch diese Aussonderung die kleinste natürliche Zahl festgelegt, zu deren Bezeichnung es mindestens 1000 Zeichen bedarf. Es ist die Zahl 10^{1000}. Die kürzere Bezeichnung wird möglich innerhalb eines Neubezeichnungsverfahrens, das aber nur auf dem Grunde eines Zeichensteigerungsverfahrens mit Erfolg ansetzen kann.

Ober- und Untersatz der Argumentation, die zur Bezeichnungs-Antinomie führt, beziehen sich also, wie in den vorangehenden Fällen, auf ein je verschiedenes Wesen von Mengen, nur daß diese Antinomie vor den anderen dadurch ausgezeichnet ist, daß nicht der Möglichkeitshorizont, sondern der Fähigkeitshorizont eines Ganzen von Teilen mit dem Mächtigkeitshorizont identifiziert wird. Wiederum wird durch eine unbemerkte Gleichsetzung des eigenen Wesens eines Gegenstandes mit einem aus welchen Gründen immer bevorzugten und einem allgemeinen Wesen untergeschobenen ein Gegeneinander von Strukturen hervorgebracht, das die gegenständliche Einheit zerbrechen muß.

Es gelang also, ein Prinzip zur Enthüllung zu bringen, von dem aus die Antinomien der Mengenlehre aufgelöst werden können. Allerdings steht für einen größeren Teil der Antinomien eine Einzelauflösung noch aus [10]). Es muß aber bedacht werden, daß es dem

---

[10]) Auch die behandelten drei Beispiele haben noch nicht jene vollständige Durchdringung erfahren, wie sie einzig in einer ausgeführten Dialektik der Mengenlehre möglich würde. Insbesondere bediente sich die Darstellung einer Auflösungsmöglichkeit der zuletzt genannten Antinomie wesentlich indirekter Beweisführung und wäre zu ergänzen durch eine positive Entwicklung des Weges, der überhaupt zu so etwas wie einer Menge ‚kürzester Zahlbezeichnungen' gelangen läßt. Was die erstbehandelten Antinomien angeht, so gehört ihre Diskussion mit in den Zusammenhang einer ontologischen Analyse des „Satzes von Cantor" bezw. des Axioms der Potenzmenge.

Sinn der Untersuchung nach garnicht so sehr darauf ankommen konnte, einzelne Antinomien wirklich zu beseitigen, als jenen Grund aufzudecken, dem sämtliche Antinomien gemeinsam ihre Herkunft verdanken und von dem aus allein eine Auflösung zu betreiben ist. Dieser Grund aber besteht, kurz gesagt, in der nivellierenden Gleichsetzung des dreifachen Wesens unendlicher Mengen. Die Cantor'sche Definition ist daher dann ungefährlich und kann der Mengenlehre vorausgesetzt werden, wenn man nur bei ihrer Anwendung auf unendliche Mengen die gleiche Vorsicht walten läßt, in welcher man ganz selbstverständlich Charaktere endlicher und unendlicher Mengen auseinanderhält. Die Antinomien gehen also auf genau das gleiche πρῶτον ψεῦδος zurück, das Cantor mit Recht seinen Gegnern vorrechnet, nur mit dem Unterschiede, daß es sich aus dem Gebiet des Endlichen gänzlich in das Gebiet des mathematisch Unendlichen zurückgezogen hat. Nur die vorontologisch oder ontologisch erfolgende volle Beachtung der auch im Unendlichen gültigen Gegensätze und „Geschlechts"-Verschiedenheiten kann eine diesen Antinomien zur Quelle dienende „Vertauschung" von Wesenscharakteren wirklich und endgültig verhindern.

Daß die führenden Mengentheoretiker einer solchen Auffassung nicht gerade fremd gegenüberstehen dürften, kann noch als gewisse Bestätigung angesehen werden. So findet man bei E. Zermelo: „Die ‚ultrafiniten Antinomien der Mengenlehre', auf die sich wissenschaftliche Reaktionäre und Antimathematiker in ihren Kämpfen gegen die Mengenlehre so eifrig und liebevoll berufen, diese scheinbaren ‚Widersprüche' beruhen lediglich auf einer V e r w e c h s l u n g[11]) der . . . Mengenlehre selbst mit den einzelnen sie darstellenden Modellen . . . Und so führen auch die mengentheoretischen ‚Antinomien', richtig verstanden, statt zu einer Verengung und Verstümmelung vielmehr zu einer jetzt noch unübersehbaren Entfaltung und Bereicherung der mathematischen Wissenschaft"[12]). Jener Vorgang einer Verwechslung, auf den hier im Zusammenhang mengentheoretischer Problematik als den eigentlichen Grund der Antinomien hingewiesen wird, muß seinem Sinne nach gleichgestellt

[11]) Nur im Zitat gesperrt.

[12]) Fund. math. t. XVI S. 47, 1930: „Über Grenzzahlen und Mengenbereiche".
Z. vgl. auch die von O. Becker in „Mathematische Existenz" Jahrb. f. Philos. u. phän. Forsch. Bd. 8 S. 550 f. gegebene Analyse der Burali-Fortischen Antinomie. Diese erfolgt im Zusammenhang ontologischer Untersuchungen, die ihrer allgemeinen Tendenz nach zwar mit den obigen zusammenstimmen und daher auch prinzipiell auf das gleiche Phänomen, nämlich die Zeitlichkeit als Konstitutivum der Unendlichkeit gerichtet sind; in der speziellen Zielsetzung aber sowie Methode und sachlichen Art der Durchführung so weit davon entfernt liegen, daß auf eine Auseinandersetzung, die nur prinzipiell zu führen wäre, verzichtet werden mußte.

werden der analysierten Seinsnivellierung, infolge deren eben ein Wesen, das nicht von einem anderen unterschieden zu werden vermag, mit ihm verwechselt wird.

Mit der Aufdeckung einer Verfehlung als des allgemeinen Grundes von Widersprüchen aber muß das Interesse der positiven Wissenschaft am Antinomienproblem erschöpft sein. Aus der Eigenart des enthüllten Irrtums aber erwächst der Ontologie die weitere Aufgabe, den Bedingungen seiner Möglichkeit selbst auf den Grund zu gehen. Denn einmal zeigte sich, daß er nur als ontologisch zu begreifender nicht irgendwelchen ontischen Verfehlungen gleichgesetzt werden kann. Sodann aber verlieh ihm die Hartnäckigkeit, mit der er sich festzusetzen vermochte, den Charakter einer Notwendigkeit, der es von vornherein verbietet, ihn auf Rechnung einer zufälligen Unaufmerksamkeit zu setzen. So entsteht innerhalb der dialektischen Problematik die weitere Aufgabe, das Wesen dieser ontologischen Verfehlung derart zu enthüllen, daß sich ein Hinweis ergibt für jenen Grund, von dem aus die ihm anhaftende Notwendigkeit Aufklärung finden kann.

Um zu einer Bestimmung der allgemeinen Natur des analysierten Irrtums zu gelangen, liegt es nahe, zu überlegen, ob die Ineinssetzung der verschiedenen Wesenheiten innerhalb der entwickelten Seinsnivellierung in ganz beliebiger Richtung erfolgt, oder ob sich eine gewisse Tendenz bemerkbar macht, welche die Bevorzugung gewisser Wesenheiten im Vorgang der Unterschiebung von vornherein leitet. Was zunächst die mögliche Nivellierung der Seinsunterschiede von Endlichkeit und Unendlichkeit allgemein betrifft, so kann garnicht daran gezweifelt werden, daß die heute kaum mehr zu ermessenden Schwierigkeiten, mit denen Cantor bis zur äußeren Durchsetzung seiner Lehre zu kämpfen hatte, in einer unausdrücklichen Bevorzugung des Phänomens der Endlichkeit qua Zumalgegebenheit gründete, welche vor Strukturen der Unendlichkeit einfach die Augen verschloß. Die Form des „potenzialen Unendlichen", in welcher die Gegner Cantors einzig das Unendliche gelten lassen wollten, bringt nur eine in ihrer Horizontoffenheit begriffene Endlichkeit zum Ausdruck. Es bestand entgegen Cantor die ausgesprochene Tendenz, das unendliche Ganze vom Anwesenheitshorizont aus allein zu begreifen, eine Einstellung, die es von vornherein ausschloß, Charaktere der Bestimmtheit am Unendlichen aufzufinden. Im gleichen Augenblick aber, in dem Cantor auch das Unendliche als „ein in allen Teilen festes, bestimmtes Quantum, ein ἀφωρισμένον[13]) verstand, hatte er, zuerst vorontologisch, schließlich mit jeder erwünschten ontologischen Deutlichkeit jene notwendige Horizonterweiterung bezw. -entschränkung vollzogen, den Bann gesprengt, der es verhinderte, daß „man

[13]) Ztschr. f. Phil. u. phil. Krit., N. F., Bd. 92, S. 108.

nicht schon früher die transfiniten Zahlen entdeckt hat“ [14]).

Diese Tendenz, die sich der Thematisierung des Unendlichen solange entgegensetzte, war aber schließlich von Cantor nicht derart gebrochen worden, daß sie nicht selbst in seiner Mengenlehre hätte Eingang finden können. Und so zeigt sich in den analysierten Antinomien, die zwar den Mächtigkeitshorizont vom Anwesenheitshorizont zu unterscheiden wissen, überall das Bestreben, die Horizonthaftigkeit der unendlichen Ganzheiten auf primäre Vorgegebenheit hin zu begreifen als eine Weise des Nichtgegebenseins, die der Zumalgegebenheit am nächsten verwandt ist. Zwischen dem äußersten, dem Möglichkeitshorizont, und dem innersten, dem Anwesenheitshorizont, liegt also gleichsam eine Spannung, die bei festgegründetem Anwesenheitshorizont die Schwierigkeit der Ausweitung um so mehr anwachsen läßt, je weiter die Entfernung vom Ausgang genommen wird. Nur so läßt sich verstehen, daß Cantor, der die Kraft besaß, die zwischen Anwesenheits- und Mächtigkeitshorizont bestehende Spannung zu bewältigen, auf die weiter zurückliegenden Horizonte wenigstens nicht mehr in gleich ausdrücklicher Weise Hinblick nehmen konnte.

Sind aber der Anwesenheitshorizont durch Endlichkeit qua Räumlichkeit, die übrigen Horizonte durch Unendlichkeit qua Zeitlichkeit bestimmt, so prägt sich in den zu Paradoxien und Antinomien des Unendlichen führenden Verfehlungen eine Tendenz aus, die allgemein als eine Verräumlichung zeitlicher Strukturen der Gegenstände bezeichnet werden kann.

Eine den Irrtum leitende Tendenz ist als Verleitung vom Irrtum selbst zu unterscheiden. Sie kann zwar, muß aber nicht den Irrtum erzeugen. Das zum Irrtum Verleitende aber wird der Schein genannt. Auf seine Natur führt die Wesensanalyse des Irrtums zurück. Und auch der Schein muß Notwendigkeit bei sich führen. So entsteht die weitere Frage: Worin gründet die Notwendigkeit des Scheins? [15])

Es liegt nicht fern, den im Mathematischen zum Ausdruck gelangenden Schein einer Verräumlichung des Zeitlichen mit jenem Phänomen in Zusammenhang zu bringen, das bereits Kant einer besonderen Erwähnung für wert hielt und das durch M. Heidegger ausdrückliche Interpretation erfuhr. „Es ist etwas sehr Bemerkungswürdiges, daß wir die Möglichkeit keines Dinges nach der bloßen Kategorie einsehen können, sondern immer eine Anschauung bei der Hand haben müssen, um an derselben die objektive Realität des

[14]) a. a. O. S. 100.

[15]) Die folgenden Erörterungen können nur noch den Anspruch erheben, Ausblicke zu sein in Richtung auf den Plan einer vollständigen Dialektik der Mengenlehre.

reinen Verstandesbegriffes darzulegen. . . . . Noch merkwürdiger aber ist, daß wir, um die Möglichkeit der Dinge zufolge der Kategorien zu verstehen, nicht bloß Anschauungen, sondern sogar immer äußere Anschauungen bedürfen“ [16]). Es wird also auf eine Art Vorrang des Raumes vor der Zeit hingewiesen, der selbst der Auslegung bedürftig erscheint, von Kant jedoch nicht weiter zum Problem gemacht wird. — „Die ekstatische Zeitlichkeit der daseinsmäßigen Räumlichkeit macht . . . verständlich . . . die ‚Abhängigkeit‘ des Daseins vom Raum, die sich in dem bekannten Phänomen offenbart, daß die Selbstauslegung des Daseins und der Bedeutungsbestand der Sprache überhaupt weitgehend von ‚räumlichen Vorstellungen‘ durchherrscht ist. Dieser Vorrang des Räumlichen in der Artikulation von Bedeutungen und Begriffen hat seinen Grund nicht in einer spezifischen Mächtigkeit des Raumes, sondern in der Seinsart des Daseins. Wesenhaft verfallend, verliert sich die Zeitlichkeit in das Gegenwärtigen und versteht sich nicht nur umsichtig aus dem besorgten Zuhandenen, sondern entnimmt dem, was das Gegenwärtigen an ihm als anwesend ständig antrifft, den räumlichen Beziehungen, die Leitfäden für die Artikulation des im Verstehen überhaupt Verstandenen und Auslegbaren“ [17]).

Aus dem Zitat soll zweierlei ermessen werden. Zunächst ergibt sich, daß die in einem speziellen Gebiet der Mathematik aufgefundene Tendenz einer räumlichen Auslegung zeitlich strukturierter Gegenstände in Zusammenhang gebracht werden muß mit einer allgemeinen Orientierung, wie sie das Seinsverständnis auf den verschiedensten Gebieten des Seins weitgehend beherrscht. Des weiteren aber ergibt sich die Möglichkeit, diese ursprüngliche Orientierung des Seinsverständnisses aus ihrem Grunde heraus zu begreifen, das heißt aber nichts anderes als aus der Seinsverfassung des Daseins selbst. Die ontologisch gestellte Frage nach dem Ursprung der Antinomien weist also letztlich zurück auf eine „Analytik des Daseins“ als jenen Ort, an dem einzig über die Notwendigkeit, den transzendentalen Charakter eines Scheins Aufklärung erhofft werden kann.

Zugleich aber ergibt sich die Möglichkeit, eine Dialektik der Mengenlehre in einordnende Beziehung zu bringen zu jener allgemeinen Dialektik der menschlichen Vernunft, wie sie von Kant in einziger Weise zur Entwicklung gebracht wurde. Sind nämlich die mengentheoretischen Antinomien keine beliebigen Widersprüche, sondern mit dem innersten Wesen des Daseins selbst verwachsen, so muß ihre Sache auch dort zur Sprache gebracht werden, wo die mögliche Widersprüchlichkeit der menschlichen Vernunft, die ihr „unhin-

---

[16]) K. d. r. V. B 288 u. 91. Z. vgl. M. Heidegger, Kant und das Problem der Metaphysik 1929, S. 191.

[17]) Sein und Zeit, 1927, S. 369.

tertreiblich anhängt", zur vollständigen Durchleuchtung gelangen soll. Bilden aber in der Tat die „mathematischen" Antinomien Kants für die mengentheoretischen den Ausgang und sollte bei Kant die Lösung auch des spezial-wissenschaftlichen Antinomienproblems mit aller Deutlichkeit vorgebildet liegen, dann wäre wieder einmal die Sachgegründetheit und Konstruktionslosigkeit der Kantischen Überlegungen unter Beweis gestellt. Es ließe sich speziell für die Kantische Antinomienlehre allen Angriffen gegenüber, denen sie im nachfolgenden deutschen Idealismus ausgesetzt war [18]), keine bessere Rechtfertigung denken als der Nachweis, daß der von ihm zur Enthüllung gebrachte Schein eine Notwendigkeit besaß, vor der selbst die Mathematik, jene strengste aller Wissenschaften, die Kant dazu am meisten von dialektischer Verstrickung entfernt glaubte, kapitulieren mußte.

Allerdings würde unter diesem Aspekt eine Neuinterpretation des „mathematischen" Teils der Kantischen Antinomienlehre unternommen werden müssen. Denn wiewohl die Phänomene von Raum und Zeit im Vordergrund stehen, so ist doch von vornherein nicht im mindesten ersichtlich, in welchem Sinne eine Nivellierung des Zeitlichen zugunsten des Räumlichen für den transcendentalen Schein maßgebend sein sollte, wie es von der Dialektik der Mengenlehre her beim Vorherrschen analoger Verhältnisse zu fordern wäre. Vielmehr ist die etwa entsprechende „Verwechslung", auf deren Ausschaltung Kants Bemühen abzielt, jene von Erscheinung und Ding an sich. So entstände die weitere Aufgabe, im Blick auf die zu einem kleinen Teil entwickelte Analytik und angedeutete Dialektik der Mengenlehre eine Auseinandersetzung mit dem Kantischen Problem zu suchen, um die ergänzende Rechtfertigung oder erforderliche Berichtigung zu erfahren.

---

[18]) Z. vgl. etwa Hegel, Wissenschaft der Logik, 1. Buch 2. Abschn. 2. Kap. C b Anm. 1.

Lebenslauf.

Geboren wurde ich, Hans Freund, am 10. Juni 1905 in Berlin als Sohn des Kaufmanns Ernst Freund und seiner Ehefrau Margarete, geb. Philippi. Bis zur Reifeprüfung Ostern 1923 besuchte ich das Arndt-Gymnasium in Berlin-Dahlem. Sodann studierte ich bis Winter 1923/24 in Berlin, bis Winter 1925/26 in Marburg a. d. L., des weiteren von Winter 1926/27 bis Sommer 1928 ebendort und von Sommer 1929 bis Winter 1930/31 in Freiburg i. Br. Im Hauptfach hörte ich Vorlesungen in Philosophie, daneben in Mathematik und Physik.